

Det Kgl. Danske Videnskabernes Selskab.

Mathematisk-fysiske Meddelelser. **XV**, 1.

DIE STRUKTUR PERIODISCHER
TRANSFORMATIONEN
VON FLÄCHEN

VON

JAKOB NIELSEN



KØBENHAVN

LEVIN & MUNKSGAARD

EJNAR MUNKSGAARD

1937

Printed in Denmark.
Bianco Lunos Bogtrykkeri A/S.

Wenn eine umkehrbar eindeutige und stetige Transformation τ einer Mannigfaltigkeit φ in sich die Eigenschaft hat, dass die n Male iterierte Transformation τ^n jeden Punkt von φ in sich transformiert, während es andererseits Punkte P von φ gibt, für welche das Punktsystem $P, \tau P, \dots, \tau^{n-1}P$ aus n verschiedenen Punkten besteht, nennt man τ eine *periodische Transformation n -ter Ordnung*. Ist \mathcal{G} eine topologische Abbildung von φ auf eine mit φ homöomorphe Mannigfaltigkeit φ' , so ist $\tau' = \mathcal{G}\tau\mathcal{G}^{-1}$ eine periodische Transformation n -ter Ordnung von φ' in sich, die als mit der Transformation τ von φ *topologisch äquivalent* bezeichnet wird. Eine Gesamtheit topologisch äquivalenter fassen wir zu einem *topologischen Typus periodischer Transformationen* zusammen.

Periodische Transformationen treten bei mannigfachen Fragen der Geometrie und der Funktionentheorie auf. Beispielsweise stellt die birationale Transformation einer algebraischen Kurve von einem Geschlecht grösser als 1 in sich eine periodische Transformation der zugehörigen Riemannschen Fläche dar. BROUWER griff die Untersuchung periodischer Transformationen (und endlicher Gruppen von Transformationen) auf allgemeiner topologischer Grundlage an und untersuchte insbesondere Kugel­fläche und Torus [1, 2, 3, 4]¹. B. v. KERÉKJÁRTÓ wies die einfache Struktur der periodischen Transformationen der Kreisscheibe und

¹ Zahlen in eckigen Klammern weisen auf das am Schluss der Arbeit angeführte Literaturverzeichnis hin.

Kugelfläche nach, wobei sich als mögliche topologische Typen nur die der Drehungen, Spiegelungen und Drehspiegelungen ergaben [5]; siehe auch [6], Abschnitt 6. In [7] behandelte er die endlichen Gruppen topologischer Transformationen der Kugelfläche mit Erhaltung der Orientierung. W. SCHERRER [8, 9, 10] gab eine ausführliche Entwicklung der Hilfsmittel der Untersuchung periodischer Transformationen von Flächen (auch nicht-orientierbaren) und der endlichen Gruppen von Transformationen, teils auf Grund einer ihm eigenen Methode, teils im Anschluss an den von BROUWER geschaffenen Begriff der *Modulfläche* und unter systematischer Verwendung der *Monodromiegruppe*. Von seinen Resultaten seien hier hervorgehoben einerseits die Aufstellung aller endlichen Gruppen für Kugelfläche und projektive Ebene, andererseits die erschöpfende Behandlung des Spezialfalles der Ordnung 2. In dem letzteren Fall verschafft sein Begriff der »minimalen halbierenden Schnittsysteme« einen Einblick in die Struktur dieser involutorischen Transformationen und gestattet, die topologische Äquivalenz für diese zu entscheiden. Im Anschluss an seine Arbeiten konnte F. STEIGER [11] als topologische Verallgemeinerung eines von WIMAN für algebraische Kurven gefundenen Satzes den maximalen Wert der Ordnung n periodischer Transformationen geschlossener Flächen in Abhängigkeit von dem topologischen Charakter der Fläche herleiten. Dass dieser Satz über die maximale Ordnung sich für Transformationen mit Erhaltung der Orientierung als ein Satz über *Abbildungsklassen* erweist, habe ich in [12] dargetan.

Die vorliegende Abhandlung setzt sich das Ziel, für orientierbare, geschlossene oder berandete Flächen die Struktur periodischer Transformationen mit Erhaltung der Orientierung zu untersuchen. Mit dem Ausgangspunkt in den Be-

griffen der Modulfläche und der Monodromiegruppe wird für den in der Fundamentalgruppe durch die periodische Flächenabbildung induzierten Automorphismus eine *Normaldarstellung* gegeben, die alle Fälle umfasst, und aus der in jedem Einzelfall die Struktur der Abbildung durch Vertauschung von Bereichen auf der universellen Überlagerungsfläche, und damit auf der Fläche selbst, erkennbar ist. Hieraus ergibt sich weiter eine notwendige und hinreichende Bedingung für die topologische Äquivalenz zweier periodischer Transformationen und damit die Möglichkeit einer vollständigen *Aufzählung aller topologischen Typen* periodischer Transformationen. Einen direkten Weg zur Entscheidung dieses Äquivalenzproblems habe ich in der dänisch geschriebenen Arbeit [13] dargestellt. — Aus der Normaldarstellung des Automorphismus der Fundamentalgruppe liest man weiter den zugehörigen Automorphismus endlicher Ordnung der *Homologiegruppe* ab, der sich in einer gegenüber Auswahl einer Homologiebasis invarianten Form durch Angabe des Systems der Eigenwerte, also des zugehörigen *charakteristischen Polynoms* vollständig beschreiben lässt. Dieses Polynom hängt nur ab von der Ordnung der Transformation, der Anzahl der Fixpunkte ihrer Potenzen und dem Geschlecht und der Ränderzahl der Modulfläche; und umgekehrt gestattet es, für geschlossene Flächen diese Zahlen zu bestimmen. Insbesondere setzt dieses Polynom die Aussage der bekannten *Spurformel* von ALEXANDER [16], LEFSCHETZ [17] und HOPF [18] für den Fall periodischer Transformationen von Flächen in Evidenz. Man gewinnt dadurch die Erkenntnis, dass der Automorphismus der Homologiegruppe, der wegen seines algebraischen Charakters besonders zugänglich ist, die periodische Flächentransformation sehr weitgehend, wenn auch nicht vollständig, festlegt.

Die Arbeit gliedert sich wie folgt:

1. Die Modulfläche.
2. Die Valenz von Kurven und Verzweigungspunkten.
3. Zurückführung auf den Fall der Unverzweigkeit.
4. Homomorphismus der Fundamentalgruppe von M .
5. Spezielle Wahl der Erzeugenden von T für $q > 0$.
6. Automorphismus der Fundamentalgruppe von φ .
7. Normaldarstellung im Falle $q > 0$.
8. Normaldarstellung im Falle $q = 0$.
9. Zusätzliche Relationen bei Verzweigkeit.
10. Strukturbeschreibung auf Grund der Normaldarstellung.
11. Der Äquivalenzsatz.
12. Automorphismus der Homologiegruppe für $q > 0$.
13. Automorphismus der Homologiegruppe für $q = 0$.
14. Charakteristisches Polynom und Spurformel.
15. Kennzeichnung der Abbildung durch das charakteristische Polynom.

Literaturverzeichnis.

1. Die Modulfläche. Eine geschlossene oder von endlich vielen Randkurven berandete, orientierbare Fläche φ sei einer periodischen, topologischen und die Orientierung erhaltenden Abbildung τ auf sich unterworfen. $n > 1$ sei die *Ordnung* von τ , d. h. die kleinste positive ganze Zahl, für welche τ^n die identische Abbildung von φ auf sich ist. Ist P ein Punkt von φ , so besteht das Punktsystem

$$(1.1) \quad P, \tau P, \tau^2 P, \dots, \tau^{n-1} P$$

aus einer gewissen Anzahl m verschiedener Punkte von φ . Dabei ist $1 \leq m \leq n$ und m ein Teiler von n . Es gibt Punkte von φ , für welche $m = n$ ist; diese mögen *einfache*

Punkte von φ heissen. Durchläuft P ganz φ , so lässt sich die Menge der Punktsysteme (1.1) nach BROUWER [1] umkehrbar eindeutig und stetig auf alle Punkte $\{P\}$ einer ebenfalls orientierbaren Fläche M abbilden, die als *Modulfläche* der periodischen Abbildung $\tau\varphi$ bezeichnet wird. M ist geschlossen oder berandet, je nachdem φ geschlossen oder berandet ist. Durch die angegebene Beziehung ist φ als eine n -blättrige Überlagerungsfläche von M , eine Riemannsche Fläche über M , erklärt.

Die über dem Spurpunkt $\{P\}$ von M liegenden insgesamt m verschiedenen Punkte des Systems (1.1) lassen sich durch

$$(1.2) \quad P, \tau P, \tau^2 P, \dots, \tau^{m-1} P$$

repräsentieren. Diese m Punkte von φ sind Fixpunkte bei τ^m und den Potenzen dieser Abbildung und werden, falls $m > 1$ ist, durch alle anderen Potenzen von τ zyklisch vertauscht. Wir setzen

$$(1.3) \quad n = m\lambda$$

und sprechen den Punkten des Systems (1.2) die *Multiplizität* λ zu. Die gleiche Bezeichnung werde auch ihrem Spurpunkt $\{P\}$ auf M beigelegt, wie wir überhaupt im Folgenden Benennungen, die sich auf die Überlagerung von M durch φ beziehen, in gleicher Weise den Punkten oder Kurven auf φ und ihren Spurpunkten oder Spurkurven auf M beilegen.

Einfache Punkte haben die Multiplizität 1. *Multiple Punkte*, d. h. Punkte mit einer Multiplizität $\lambda > 1$, liegen, wie BROUWER gezeigt hat, isoliert und sind *Verzweigungspunkte* von φ über M . Solche können nicht auf Randkurven liegen. Rückt ein variabler Punkt $\{P\}$ auf M innerhalb

einer ganz aus einfachen Punkten bestehenden Umgebung eines Verzweigungspunktes in diesen hinein, so rücken auf φ je λ von den darüberliegenden n Punkten zusammen und vereinigen sich zu einem Punkt der Multiplizität λ . Man pflegt die Zahl $\lambda - 1$ als die zugehörige »Verzweigungsordnung« zu bezeichnen. — *Fixpunkte* bei τ sind Punkte mit $m = 1$, $\lambda = n$, und nur solche. — Falls es nur einfache Punkte ($m = n$, $\lambda = 1$) gibt, heisst φ *unverzweigt* über M ; in diesem Falle sind die Abbildungen τ , τ^2 , \dots , τ^{n-1} sämtlich fixpunktfrei.

Zur näheren Begründung der Eigenschaften der Modulfläche, an die in diesem Paragraphen erinnert wurde, vergleiche man ausser [1] auch den Abschnitt 6, § 6 des Lehrbuches [6] von B. v. KERÉKJÁRTÓ.

2. Die Valenz von Kurven und Verzweigungspunkten.

Es sei α eine einfache, geschlossene, gerichtete Kurve auf M , die eventuell vorhandene Verzweigungspunkte vermeidet, und P ein Punkt von φ , dessen Spurpunkt $\{P\}$ auf α liegt. Man durchlaufe von P aus einen Weg auf φ über der Spur α . Dieser möge sich erstmalig nach λ -fachem Umlauf um α schliessen; es entsteht dabei eine einfache, geschlossene, gerichtete Kurve k auf φ , die eine λ -fache Überdeckung von α darstellt. Die Zahl λ heisse die *Multiplizität* der Kurven α oder k , und im Falle $\lambda > 1$ werden diese als *multiple Kurven* bezeichnet. Das Bild τk von k bei τ ist ebenfalls eine einfache, geschlossene, gerichtete Kurve auf φ , die eine λ -fache Überdeckung von α darstellt. Da auf k genau λ Punkte über $\{P\}$ liegen, ist τk dann und nur dann mit k identisch, wenn $\lambda = n$. Für $\lambda < n$ ist τk zu k fremd. Ist auch $2\lambda < n$, so ist $\tau^2 k$ zu k und τk fremd. Durch Fortsetzung dieses Schlusses sieht man, dass λ ein Teiler

von n ist; setzt man $n = m\lambda$ wie in (1.3), so liegen über z die m getrennten Kurven

$$(2.1) \quad k, \tau k, \tau^2 k, \dots, \tau^{m-1} k,$$

und es ist $\tau^m k = k$. Die Deckkurven von z haben also alle die gleiche Multiplizität λ , und die Multiplizität ist daher eine z zukommende Eigenschaft. Man drückt bekanntlich diese Eigenschaft der Überlagerung dadurch aus, dass man φ als eine *reguläre* Riemannsche Fläche über M bezeichnet.

Auf der Kurve k liegen die λ Punkte

$$(2.2) \quad P, \tau^m P, \tau^{2m} P, \dots, \tau^{(\lambda-1)m} P$$

über dem Spurpunkt $\{P\}$. Es sei $\tau^{\sigma m} P$ derjenige unter den Punkten (2.2), der bei positivem Umlauf um k zunächst auf P folgt. Bei $\tau^{\sigma m}$ wird k so auf sich abgebildet, dass das Punktsystem (2.2) in seiner Anordnung auf k eine zyklische Vertauschung um einen Schritt erleidet. Diese Anordnung auf k wird daher durch die Reihenfolge

$$(2.3) \quad P, \tau^{\sigma m} P, \tau^{2\sigma m} P, \dots, \tau^{(\lambda-1)\sigma m} P$$

angegeben, wobei Exponenten von τ nur mod n in Betracht kommen. Da $\tau^m P$ unter den Punkten (2.3) vorkommt, muss

$$(2.4) \quad (\sigma, \lambda) = 1$$

sein, indem dies Klammersymbol den grössten gemeinsamen Teiler bezeichnet. Man bestimme δ so, dass

$$(2.5) \quad \delta\sigma \equiv 1 \pmod{\lambda}$$

ist; dadurch ergibt sich die Stelle, an welcher der Punkt $\tau^m P = \tau^{\delta\sigma m} P$ in der Reihe (2.3) auftritt. Die Operation τ^m ,

bei welcher die Kurve k aus dem Kurvensystem (2.1) erstmalig auf sich abgebildet wird, ist für diese Kurve eine periodische Transformation der Ordnung λ , und zwar ist $\tau^m k$ offenbar topologisch äquivalent mit der Drehung einer Kreislinie in sich um $\frac{\delta}{\lambda}$ einer Volldrehung, wobei δ wegen (2.5) zu λ teilerfremd ist. Da nun $\tau^m \cdot \tau P = \tau \cdot \tau^m P$ ist, folgt, dass zu der periodischen Transformation τ^m von τk und weiter von allen Kurven aus (2.1) die gleiche *Drehzahl* $\frac{\delta}{\lambda}$ gehört. Daher ist auch σ eine unabhängig von der Auswahl von P zu z gehörige charakteristische Zahl. Die Zahlen σ und δ kommen dabei nur als Restklassen mod λ in Betracht. Wir nennen σm den zu der gerichteten Kurve z gehörigen *Monodromieexponenten* und schreiben

$$(2.6) \quad \mu(z) \equiv \sigma m \pmod{n}$$

oder auch nur

$$(2.7) \quad \mu(z) = \sigma m.$$

Kennt man den Monodromieexponenten $\mu(z)$ einer Kurve z von M , so berechnet man

$$(2.8) \quad m = (\mu(z), n), \quad \lambda = \frac{n}{m}, \quad \sigma = \frac{\mu(z)}{m}.$$

Dann gilt (2.4), und mittels (2.5) kann man die Drehzahl berechnen. Denjenigen Charakter der Kurve z oder der Kurven des Systems (2.1), der sich in dem Monodromieexponenten, also ausführlicher in dem Zahlensystem (2.8) zu erkennen gibt, nennen wir die *Valenz* dieser Kurven.

Für nicht-multiple Kurven hat man $\lambda = 1$, $m = n$, und man kann $\sigma = 0$ setzen. Für $\lambda = n$, $m = 1$ hat man eine *Fixkurve* bei $\tau\varphi$, und der Monodromieexponent ist eine zu n teilerfremde Restklasse $\sigma \pmod{n}$.

Keht man die Durchlaufungsrichtung von z um, so

ändern sich m und λ nicht, während die Restklasse $\sigma \bmod \lambda$ das Vorzeichen wechselt: Die neue Valenz ist der früheren *entgegengesetzt*.

Ersetzt man τ durch τ^ϱ , $(\varrho, n) = 1$, so ändern sich m und λ nicht, und σ ist durch die Restklasse $\sigma\varrho^{-1} \bmod \lambda$ zu ersetzen; denn die Drehzahl ist mit ϱ zu multiplizieren.

Deformiert man die Kurve \varkappa auf M , ohne sie über Verzweigungspunkte hinwegzuschieben, so bleibt die Valenz aus Gründen der Stetigkeit ungeändert. Ist \varkappa auf diese Weise auf einen Punkt von M zusammenziehbar, der nicht Verzweigungspunkt ist, so ist \varkappa nicht multipel.

Für den Fall berandeter orientierter Flächen treffen wir die Verabredung, die Randkurven immer so zu orientieren, dass sie die Fläche positiv beranden. Dann kann man in eindeutiger Weise von der Valenz der Ränder sprechen. Kehrt man die Flächenorientierung um, so geht die Valenz einer Randkurve in die entgegengesetzte über. — Ist M homöomorph einem Kreisring und φ unverzweigt über M , so haben die Randkurven entgegengesetzte Valenz.

Die letzte Bemerkung gibt uns die Möglichkeit, von der *Valenz eines Verzweigungspunktes* auf einer orientierten Fläche zu sprechen: Es ist die Valenz einer einfachen, geschlossenen Kurve, die den Verzweigungspunkt beliebig nahe auf M positiv umkreist. Bei Wechsel der Orientierung auf φ geht die Valenz eines Verzweigungspunktes in die entgegengesetzte über. Die Zahlen m und λ haben für den Verzweigungspunkt dieselbe Bedeutung wie in 1, und auch die Bedeutung der Drehzahl ist unmittelbar anschaulich zu erfassen. Vgl. den Rotationssatz von B. v. KERÉKJÁRTÓ [5, 6].

Geht man mittels einer topologischen Abbildung \mathcal{P} von φ auf eine Fläche φ' zu einer topologisch äquivalenten periodischen Transformation

$$(2.9) \quad \tau' = \mathcal{D}\tau\mathcal{D}^{-1}$$

von φ' über, so erhält die gerichtete Kurve $k' = \mathcal{D}k$ von φ' offenbar dieselbe Valenz, wie die Kurve k von φ . Überträgt man die Orientierung von φ durch \mathcal{D} nach φ' , so wird eine Randkurve bzw. ein Verzweigungspunkt von φ durch \mathcal{D} in eine Randkurve bzw. einen Verzweigungspunkt von φ' mit gleicher Valenz abgebildet.

Zu den in diesem Paragraphen behandelten Begriffen der regulären Überlagerungsfläche und des Monodromie-exponenten vergleiche man [9] und [14].

3. Zurückführung auf den Fall der Unverzweigtheit.

Es sei V ein multipler Punkt von φ mit der Valenz $[m, \lambda, \sigma]$. Um den Spurpunkt $\{V\}$ auf M grenzen wir durch eine Kurve α ein Elementarflächenstück E von M ab, das abgesehen von $\{V\}$ nur einfache Punkte enthält und nicht an den eventuell vorhandenen Rand von M reicht. Dabei sei die Kurve α so orientiert, dass sie $M - E$ positiv berandet, also $\{V\}$ negativ umkreist. Die Valenz von α ist also durch $[m, \lambda, -\sigma]$ gegeben. Entfernt man die inneren Punkte von E aus M und die entsprechenden m Elementarflächenstücke um $V, \tau V, \dots, \tau^{m-1}V$ aus φ , so entsteht eine neue Fläche $\bar{\varphi}$ mit einer neuen Modulfläche $\bar{M} = M - E$. Dem Übergang von φ zu $\bar{\varphi}$ entspricht die Ersetzung von m multiplen Punkten von φ durch m multiple Ränder von $\bar{\varphi}$. Nun genügt es offenbar, die Struktur der n -periodischen Transformation der Teilfläche $\bar{\varphi}$ von φ zu untersuchen. Denn da die Struktur der n -periodischen Transformation des Überlagerungsgebildes von E durch das Valenzsymbol $[m, \lambda, \sigma]$ vollständig beschrieben wird, kann man nach-

träglich wieder »die Löcher schliessen«, also die Transformation von $\overline{\varphi}$ auf φ erweitern.

Indem wir auf diese Weise alle multiplen Punkte durch multiple Ränder ersetzen, reduzieren wir die Strukturuntersuchung auf den Fall der Unverzweigtheit, bei dem es nur einfache Punkte gibt. Die Abbildungen τ , τ^2 , \dots , τ^{n-1} sind also sämtlich fixpunktfrei. Dabei legen wir nun folgende Bezeichnungen für die weitere Untersuchung fest:

n die Ordnung der periodischen Transformation τ ,

p das Geschlecht der orientierbaren Fläche φ ,

r die Ränderzahl von φ ,

q das Geschlecht der Modulfläche M ,

s die Ränderzahl von M ,

$[m_\nu, \lambda_\nu, \sigma_\nu]$ die Valenz der ν -ten Randkurve von M .
 $\nu = 1, 2, \dots, s$.

Dabei sind diese Symbole nicht willkürlich wählbar: Da die ν -te Randkurve von M durch m_ν Ränder von φ überlagert wird, hat man

$$(3.1) \quad r = m_1 + m_2 + \dots + m_s.$$

Ferner hat man wegen der unverzweigten Überlagerung die folgende Beziehung zwischen den Charakteristiken:

$$(3.2) \quad 2p + r - 2 = n(2q + s - 2).$$

(Denkt man sich M irgendwie trianguliert, so ist die Anzahl der Seiten vermindert um die Anzahl der Ecken und Dreiecke gleich der Charakteristik $2q + s - 2$. Bei Durchdrückung dieser Triangulierung auf eine unverzweigte n -blättrige Überlagerungsfläche sind diese Anzahlen einfach mit n zu multiplizieren.)

Später ergeben sich noch weitere Relationen, insbesondere (4.6).

Falls alle Ränder in der oben beschriebenen Weise durch Ausschneidung von Verzweigungspunkten entstanden sind, erhält man durch Eintragung von (3.1) in (3.2) die Formel von RIEMANN-HURWITZ für geschlossene Riemannsche Flächen.

Kommen keine multiplen Ränder vor, so ist $r = ns$ wegen (3.1) (speziell auch $r = s = 0$), und aus (3.2) wird

$$(3.3) \quad p - 1 = n(q - 1) \quad (\text{für } r = ns).$$

4. Homomorphismus der Fundamentalgruppe von M .

Nach Wahl eines Punktes O auf M zeichne man auf M mit O als Anfangs- und Endpunkt ein kanonisches System von $2q + s$ Kurven wie in Fig. 1. Dann stellen die Wege

$$(4.1) \quad \alpha_1, \beta_1, \alpha_2, \beta_2, \dots, \alpha_q, \beta_q, \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$$

ein Erzeugendensystem der Fundamentalgruppe T von M dar. Dabei hat man als einzige definierende Relation von T die Relation

$$(4.2) \quad k_1 k_2 \dots k_q \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s = 1,$$

wobei zur Abkürzung

$$(4.3) \quad k_i = \alpha_i \beta_i \alpha_i^{-1} \beta_i^{-1} \quad (i = 1, 2, \dots, q)$$

gesetzt ist.

Ist o ein Punkt von φ über der Spur O , so gelangt man bei einem Umlauf z. B. über der Spur α_1 von o nach $\tau^{\mu(\alpha_1)} o$; vgl. die Definition der Operation μ in (2.6). Einem geschlossenen Weg wie z. B. $\alpha_1 \alpha_2$ entspricht dabei der Monodromieexponent $\mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2)$. Die Operation μ stellt

also eine homomorphe Beziehung der Fundamentalgruppe T von M auf die additive Gruppe der Restklassen mod n dar. Die zu den Erzeugenden (4.1) gehörigen Monodromie-substitutionen müssen die ganze Monodromiegruppe er-

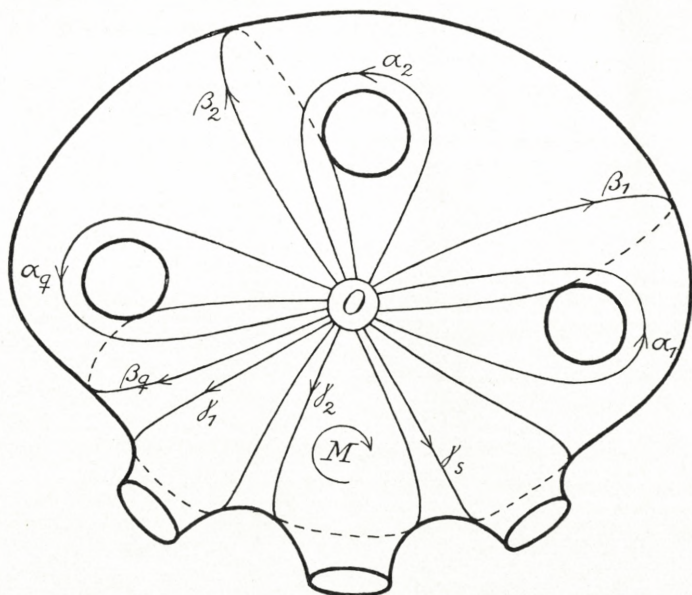


Fig. 1.

zeugen, da man ja o mit τo auf φ verbinden und den zugehörigen Spurweg auf M in der Fundamentalgruppe darstellen kann. Also muss

$$(4.4) \quad (\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\beta_q), \mu(\gamma_1), \dots, \mu(\gamma_s), n) = 1$$

sein. Nach den Bezeichnungen von 3 ist dabei

$$(4.5) \quad \mu(\gamma_\nu) \equiv \sigma_\nu m_\nu \pmod{n} \quad (\nu = 1, 2, \dots, s)$$

gesetzt.

Die Operation μ ist kommutativ. Bei ihrer Anwendung auf ein Element von T kommt es also nur darauf an, in

welche Restklasse nach der Kommutatorgruppe von T dies Element gehört. Insbesondere ist $\mu(k_i) \equiv 0 \pmod n$. Aus (4.2) und (4.5) hat man daher

$$(4.6) \quad \sigma_1 m_1 + \sigma_2 m_2 + \cdots + \sigma_s m_s \equiv 0 \pmod n$$

als weitere Relation zwischen den in 3 definierten Symbolen. Hat die Modulfläche das Geschlecht Null, so folgt aus (4.4) überdies

$$(4.7) \quad (\sigma_1 m_1, \sigma_2 m_2, \dots, \sigma_s m_s, n) = 1 \quad (\text{für } q = 0).$$

5. Spezielle Wahl der Erzeugenden von T für $q > 0$.

Die Anbringung des kanonischen Kurvensystems der Fig. 1 auf der Modulfläche M ist mit weitgehender Willkür verbunden. Wir werden im Folgenden topologische Abbildungen von M auf sich betrachten, die die Orientierung von M erhalten und O in sich überführen, und dabei untersuchen, wie sich die μ -Werte des Erzeugendensystems (4.1) ändern. Diese Abbildungen von M auf sich setzen wir wiederum aus 8 erzeugenden Abbildungen S_1, \dots, S_8 zusammen. Wir werden diese Abbildungen durch isomorphe Transformationen der Fundamentalgruppe T von M in sich beschreiben, indem wir angeben, welche Elemente von T jeweils für die ursprünglichen Erzeugenden zu substituieren sind; Erzeugende, die ungeändert bleiben, werden dabei nicht mit aufgeführt.

$$S_1: \quad \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 \beta_1$$

$$S_2: \quad \beta_1 \rightarrow \beta_1 \alpha_1$$

$$S_3: \quad \alpha_1 \rightarrow \alpha_2$$

$$\beta_1 \rightarrow \beta_2$$

$$\alpha_2 \rightarrow k_2^{-1} \alpha_1 k_2$$

$$\beta_2 \rightarrow k_2^{-1} \beta_1 k_2$$

$$\begin{aligned}
 S_4: \quad & \alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \\
 & \beta_1 \rightarrow \beta_2 \\
 & \alpha_2 \rightarrow \alpha_3 \\
 & \text{---} \\
 & \beta_{q-1} \rightarrow \beta_q \\
 & \alpha_q \rightarrow k_q^{-1} \dots k_2^{-1} \alpha_1 k_2 \dots k_q \\
 & \beta_q \rightarrow k_q^{-1} \dots k_2^{-1} \beta_1 k_2 \dots k_q \\
 \\
 S_5: \quad & \alpha_1 \rightarrow \alpha_1 \alpha_2 \beta_2^{-1} \\
 & \beta_1 \rightarrow \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_1 \alpha_2 \beta_2^{-1} \\
 & \alpha_2 \rightarrow \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_1 \alpha_2 \beta_2^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2^{-1} \\
 & \beta_2 \rightarrow \beta_2 \beta_2 \alpha_2^{-1} \beta_1^{-1} \alpha_2 \beta_2^{-1} \\
 \\
 S_6: \quad & \gamma_1 \rightarrow \gamma_1 \gamma_2 \gamma_1^{-1} \\
 & \gamma_2 \rightarrow \gamma_1 \\
 \\
 S_7: \quad & \gamma_1 \rightarrow \gamma_2 \\
 & \gamma_2 \rightarrow \gamma_3 \\
 & \text{---} \\
 & \gamma_{s-1} \rightarrow \gamma_s \\
 & \gamma_s \rightarrow \gamma_s^{-1} \dots \gamma_2^{-1} \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s \\
 \\
 S_8: \quad & \alpha_q \rightarrow \gamma_1^{-1} \alpha_q \gamma_1 \\
 & \beta_q \rightarrow \gamma_1^{-1} \alpha_q^{-1} \gamma_1 \alpha_q \beta_q \alpha_q \alpha_q \gamma_1 \\
 & \gamma_1 \rightarrow \gamma_1^{-1} \alpha_q^{-1} \gamma_1 \alpha_q \gamma_1.
 \end{aligned}$$

Man stellt zunächst mit geringer Mühe fest, dass S_1, \dots, S_8 Automorphismen der durch die Elemente (4.1) erzeugten *freien* Gruppe sind, indem die ursprünglichen Erzeugenden sich durch die ihnen bei den Substitutionen S entsprechenden ausdrücken lassen, ohne dass man von der Relation (4.2) Gebrauch macht. Ferner geht das *Relationswort* auf der linken Seite von (4.2) bei allen S in sich über, wie man durch unmittelbare Einsetzung feststellt.

Also sind die S auch Automorphismen von T . Dass ihnen dann auch topologische Abbildungen von M auf sich mit Erhaltung des Punktes O und der Orientierung entsprechen,

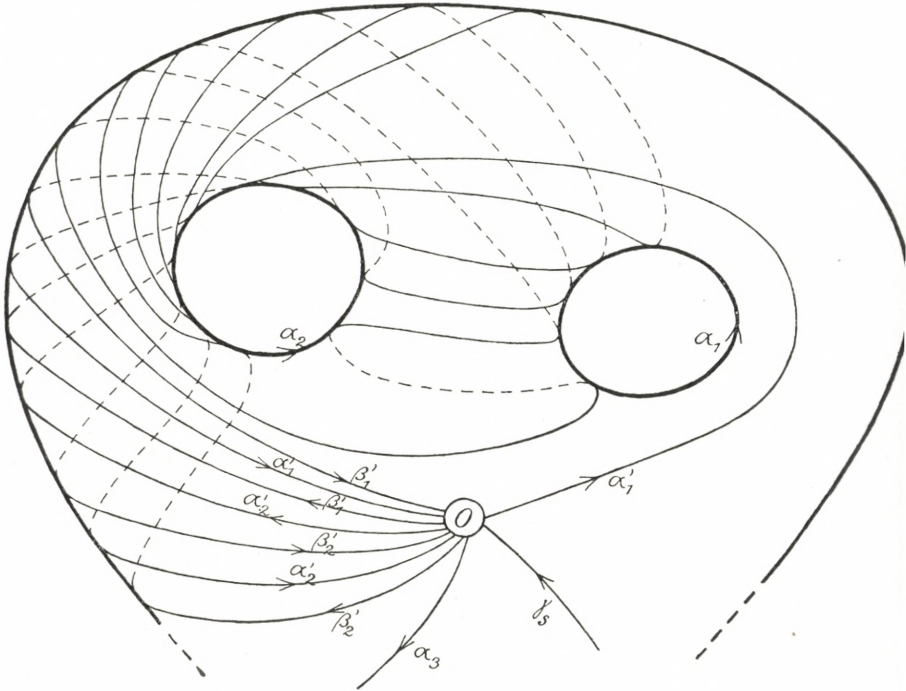


Fig. 2.

bestätigt man leicht durch Zeichnung des entsprechenden Systems von Bildkurven. Es wird genügen, dies in den zwei verwickeltesten Fällen, nämlich für S_5 bzw. S_8 , durch die Figuren 2 bzw. 3 auszuführen. Dabei ist in Fig. 2 nur derjenige Teil der Fläche angedeutet, der zu den ersten beiden Rückkehrschnittpaaren gehört, und in Fig. 3 derjenige Teil, der zu dem q -ten Rückkehrschnittpaar und der ersten Randkurve gehört. Die neuen Fundamentalkurven sind dabei durch einen Akzent bezeichnet.

Für $q = 2$ ist $S_3 = S_4$. Für $s = 2$ ist $S_6 = S_7$. Für $q = 1$ fallen S_3 , S_4 und S_5 fort. Für $s = 1$ fallen S_6 und S_7 , und für $s = 0$ überdies S_8 fort. Für $q = 0$ fallen alle S fort, die Symbole α und β enthalten.

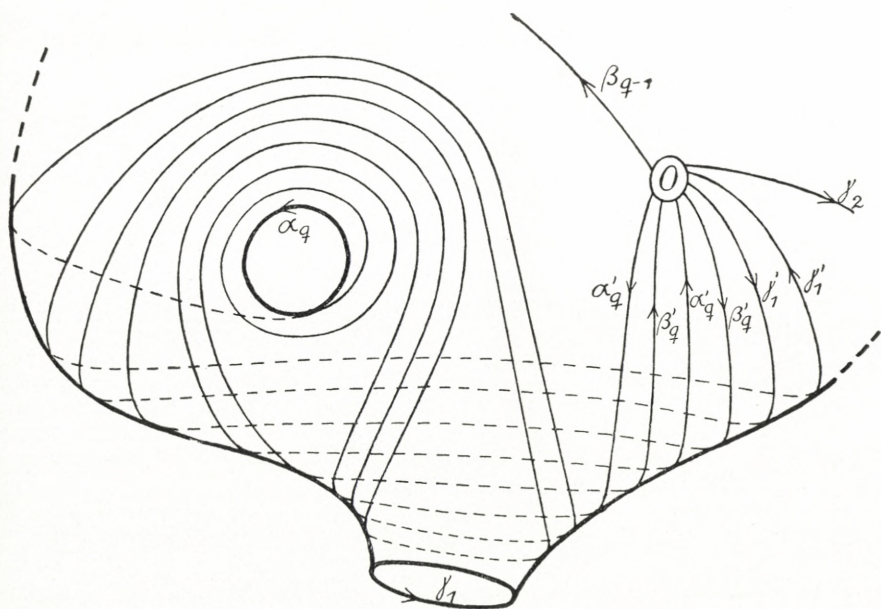


Fig. 3.

Die μ -Werte der Erzeugenden $\gamma_1, \dots, \gamma_s$, sind durch die Valenzen der Ränder gegeben; siehe (4.5). Für diese besteht die Wirkung der S nur darin, dass S_6 und S_7 eine beliebige Änderung derjenigen Reihenfolge herzustellen gestatten, in der die Ränder für die Darstellung von T berücksichtigt werden. Für den speziellen Fall $q = 0$ ist dies somit überhaupt die einzige Wirkung der S .

In dem Rest dieses Paragraphen handelt es sich somit um den Fall $q > 0$. Wir stellen die μ -Werte der α_i und β_i in einer Matrix A mit q Zeilen und zwei Spalten zusammen:

$$(5.1) \quad A = \begin{pmatrix} \mu(\alpha_1) & \mu(\beta_1) \\ \mu(\alpha_2) & \mu(\beta_2) \\ \dots & \dots \\ \mu(\alpha_q) & \mu(\beta_q) \end{pmatrix}$$

Es soll nun gezeigt werden, dass man durch Ausübung der S erreichen kann, dass an einer beliebig gewählten Stelle von A die Restklasse 1 mod n und an den übrigen $2q-1$ Stellen die Restklasse 0 mod n zu stehen kommt.

Durch S_1 wird $\mu(\alpha_1)$ durch $\mu(\alpha_1) + \mu(\beta_1)$, und durch S_2 wird $\mu(\beta_1)$ durch $\mu(\beta_1) + \mu(\alpha_1)$ ersetzt, während sich im übrigen in A nichts ändert. Durch fortgesetzte Anwendung von S_1 und S_2 kann man daher erreichen, dass $\mu(\beta_1)$ durch die Restklasse 0 und $\mu(\alpha_1)$ durch die Restklasse der Zahl $(\mu(\alpha_1), \mu(\beta_1), n)$ ersetzt wird. Ist $q > 1$, so kann man durch S_3 und S_4 eine beliebige Permutation der q Zeilen von A herstellen, ohne im übrigen an den Elementen der Matrix etwas zu ändern. Also kann man durch S_1, \dots, S_4 erzielen, dass die zweite Spalte von A aus Restklassen 0 besteht. Nachdem dies eingetreten ist, zieht man S_5 heran: Die Wirkung von S_5 besteht dann nur darin, $\mu(\alpha_1)$ durch $\mu(\alpha_1) + \mu(\alpha_2)$ zu ersetzen, ohne $\mu(\alpha_2), \dots, \mu(\alpha_q)$ zu ändern und ohne etwas daran zu ändern, dass $\mu(\beta_1), \dots, \mu(\beta_q)$ die Restklasse 0 sind. Durch fortgesetzte Anwendung von S_5 zusammen mit den durch S_3 und S_4 bewirkten Zeilenpermutationen kann man daher noch erreichen, dass $q-1$ der $\mu(\alpha_i)$, also $2q-1$ der Elemente von A die Restklasse 0 sind. Als das letzte Element kann man den grössten gemeinsamen Teiler aller ursprünglichen Elemente von A , d. h. die durch die Zahl

$$(5.2) \quad (\mu(\alpha_1), \dots, \mu(\alpha_q), \mu(\beta_1), \dots, \mu(\beta_q), n) = z$$

bestimmte Restklasse erzielen.

Ist $z = 1$, so ist unser Ziel erreicht. Ist $z = n$, so ist \mathcal{A} die Nullmatrix und ist daher von vorne herein die Nullmatrix gewesen, sodass dar kein S angewendet ist. Ist $z > 1$ und ein echter Teiler von n , so kann man noch die Restklasse z durch yz ersetzen, wobei y eine beliebig vorgeschriebene, zu $\frac{n}{z}$ teilerfremde Zahl ist. Denn ist $\{z, 0\}$ die erste Zeile von \mathcal{A} , so wird sie durch S_2^y in $\{z, yz\}$ und weiter durch S_1^x in $\{z(1+xy), yz\}$ verwandelt, und das ist gleich $\{0, yz\}$, wenn man x so wählt, dass $xy \equiv -1 \pmod{\frac{n}{z}}$ ist. Diese Bemerkung zeigt zugleich (für $y = 1$), dass man die von 0 verschiedene Restklasse nach Belieben in der ersten oder zweiten Spalte von \mathcal{A} , also mittels S_1, \dots, S_4 an beliebiger Stelle von \mathcal{A} anbringen kann.

Ist nun $z > 1$, so muss $s > 0$ sein wegen (4.4). Dann sei

$$u = (\mu(\gamma_1), \dots, \mu(\gamma_s), n).$$

Wegen (4.4) gibt es Zahlen x und y so, dass

$$xu + yz = 1$$

ist. Für $z = n$ muss $u = 1$ sein, und man kann $y = 0$, $x = 1$ wählen. Für $1 < z < n$ ist y nur als Restklasse mod u bestimmt, und wegen $(y, u) = 1$ kann man y so wählen, dass $\left(y, \frac{n}{z}\right) = 1$ ist. Man kann also in allen Fällen eine Zahl y , die für $z = n$ gleich Null und für $1 < z < n$ zu $\frac{n}{z}$ teilerfremd ist, und eine Linearkombination L von $\mu(\gamma_1), \dots, \mu(\gamma_s)$ so wählen, dass

$$(5.3) \quad yz + L \equiv 1 \pmod{n}$$

ist.

Nun richte man für $z > 1$ die Matrix \mathcal{A} so ein, dass $\mu(\beta_q) = yz$ und alle übrigen Elemente 0 sind, wobei y

gemäss (5.3) gewählt ist. Dann hat S_8 die Wirkung, $\mu(\beta_q)$ durch $\mu(\beta_q) + \mu(\gamma_1)$ zu ersetzen und im übrigen nichts in \mathcal{A} zu ändern. Durch S_6 und S_7 kann man ein beliebiges γ_ν an die Stelle von γ_1 bringen und daher durch fortgesetzte Anwendung von S_6 , S_7 und S_8 eine beliebige Linearkombination von $\mu(\gamma_1), \dots, \mu(\gamma_s)$ zu $\mu(\beta_q)$ hinzufügen. Nach (5.3) kann man daher an der Stelle $\mu(\beta_q)$ die Restklasse $1 \bmod n$ erzielen, und diese lässt sich dann, wie schon genannt, an jede Stelle von \mathcal{A} verlegen. — Damit ist der Beweis für den obigen Satz erbracht.

Im Falle $q > 0$ lassen sich also die kanonischen Kurven α_1, \dots, β_q der Fig. 1 so wählen, dass eine (beliebig gewählte) unter ihnen die Multiplizität n hat und die übrigen $2q - 1$ nicht multipl sind, und dass überdies einem Umlauf um die multiple die Monodromiesubstitution τ^1 entspricht.

6. Automorphismus der Fundamentalgruppe von φ .

Die universelle Überlagerungsfläche von M lässt sich bekanntlich topologisch auf einen Bereich Φ der euklidischen oder hyperbolischen Ebene so abbilden, dass die Fundamentalgruppe T von M dabei als diskontinuierliche Bewegungsgruppe von Φ in sich dargestellt wird.

Der euklidische Fall liegt vor, wenn T abelsch ist, und das tritt nur in zwei Fällen ein:

- a) Wenn $q = 0$ und $s = 2$, wobei beide Ränder multipl sind,
- b) Wenn $q = 1$ und $s = 0$.

Denn wenn kein Rand multipl ist, so ist $q > 0$ wegen $n > 1$ und (3.3), und T ist dann nur für $q = 1$, $s = 0$ abelsch; und wenn multiple Ränder vorkommen, so ist ihre Anzahl mindestens 2 wegen (4.6), und andererseits ist T im Falle $s \geq 2$ nur für $s = 2$, $q = 0$ abelsch. — Im Falle

a) ist M und damit auch φ einem Kreisring homöomorph, wobei n beliebige Werte haben kann. Je nachdem von den beiden Randkurven keine, eine oder beide durch Ausschneiden eines Verzweigungspunktes entstanden sind, ist die betrachtete Transformation der ursprünglichen Fläche φ topologisch äquivalent mit der n -periodischen Drehung a_1) eines Kreisringes um seinen Mittelpunkt, a_2) einer Kreisscheibe um ihren Mittelpunkt, a_3) einer Kugel um einen Durchmesser; dabei hat man in jedem der drei Fälle die Drehzahl als einzige kennzeichnende Invariante. Das sind die durch BROUWER und v. KERÉKJÁRTÓ zuerst erledigten Fälle [2, 5]. — Im Falle b) kann man nach 5 ein kanonisches Schnittpaar α_1, β_1 so wählen, dass zu ihnen die Substitutionen τ^1 und τ^0 gehören. Wegen (3.3) ist $p = 1$ und n beliebig. Die betrachtete Transformation von φ ist also topologisch äquivalent mit der Drehung eines metrisch regulären Torus in sich $\frac{1}{n}$ einer vollen Drehung. Schon in einem so einfachen Fall ergibt also die Betrachtung von 5 das anschaulich zuerst wohl überraschende Resultat, dass z. B. eine $\frac{2}{5}$ Drehung eines metrisch regulären Torus in sich mit der $\frac{1}{5}$ Drehung topologisch äquivalent ist. Dadurch vereinfacht sich die von BROUWER in [3, § 1] gegebene Aufzählung, indem die dort mit a bezeichnete, zu n teilerfremde Zahl immer durch 1 ersetzt werden kann.

Da man somit im euklidischen Fall die Struktur der periodischen Transformation und das zugehörige Äquivalenzproblem völlig übersieht und eine Aufzählung aller möglichen topologischen Typen angeben kann, können wir uns im Folgenden auf den hyperbolischen Fall beschränken, in welchem T nicht kommutativ ist.

Die hyperbolische Ebene sei in bekannter Weise durch

das Innere des Einheitskreises E der Ebene einer komplexen Variablen x so dargestellt, dass ihre Bewegungen in sich durch linear-gebrochene Substitutionen in x beschrieben werden, die E in sich überführen. Der Bereich Φ ist mit dem Inneren von E oder mit einem Teilbereich davon identisch, je nachdem M geschlossen oder berandet ist. In letzterem Fall kann man annehmen, dass die Ränder von M geschlossene geodätische Linien im Sinne der von der x -Ebene auf M übertragenen hyperbolischen Metrik sind. Dann wird der Bereich Φ von »Geraden«, d. h. zu E orthogonalen Kreisbögen berandet, die das Innere von E durchziehen. Der kürzeren Ausdrucksweise zuliebe sprechen wir von Φ direkt als der universellen Überlagerungsfläche von M , anstatt Φ als topologisches Abbild der abstrakt definierten universellen Überlagerungsfläche zu bezeichnen. T ist die Gruppe der Decktransformationen von Φ über M , was wir kurz durch die Schreibweise

$$(6.1) \quad M = \Phi \bmod T$$

zum Ausdruck bringen.

Nun lässt sich Φ auch als universelle Überlagerungsfläche von φ auffassen und zwar auf genau n verschiedene Weisen, von denen wir eine folgendermassen festlegen: Sei $x = \omega$ ein Punkt von Φ und o ein Punkt von φ , beide mit dem Punkt O der Fig. 1 als Spurpunkt auf M . Einer geschlossenen Kurve von M mit dem Anfangs- und Endpunkt O , die einem Element z der Fundamentalgruppe T von M entspricht, entspricht in Φ ein Weg von ω nach dem Punkte $z\omega$ und auf φ ein Weg von o nach dem Punkte $\tau^{\mu(z)}o$. Der letztere ist dann und nur dann geschlossen, wenn $\mu(z) \equiv 0 \bmod n$ ist, und ihm entspricht in diesem Fall ein Element der Fundamentalgruppe F von φ bei

Zugrundelegung von o als Anfangspunkt. Dadurch ergibt sich F als diejenige Untergruppe von T , für deren Elemente $\mu \equiv 0 \pmod{n}$ ist. Wegen des kommutativen Charakters der Operation μ ist F Normalteiler von T . Die Faktorgruppe $\frac{T}{F}$ ist die zyklische Gruppe der Ordnung n . Die Festlegung von Φ als universelle Überlagerungsfläche von φ geschieht nun eindeutig durch die Vorschrift, dass zwei Punkte von Φ dann und nur dann denselben Punkt von φ überdecken, wenn sie sich bei einem Element der Untergruppe F von T entsprechen, — sie überdecken dann auch denselben Punkt von M , — und dass überdies ω den Punkt o überdecken soll. Nach dieser Festsetzung schreiben wir entsprechend (6.1)

$$(6.2) \quad \varphi = \Phi \text{ mod } F.$$

Der durch ein beliebiges Element z von T bewirkten Bewegung von Φ in sich entspricht nun die Abbildung $\tau^{\mu(z)}$ von φ auf sich. Durch Transformation mit z wird der Normalteiler F von T isomorph auf sich abgebildet. Ist f ein Element von F , also eine Decktransformation von Φ über φ , so entspricht auch fz der Abbildung $\tau^{\mu(z)}$ von φ , und der zugehörige Automorphismus von F geht aus dem vorigen durch Hinzufügung eines inneren Automorphismus von F , nämlich der Transformation aller Elemente von F mit f , hervor. Zwei solche Automorphismen nennen wir *verwandt* und eine Gesamtheit verwandter eine *Automorphismenfamilie* von F . Den n Potenzen von τ entsprechen also n Automorphismenfamilien von F .

Nun sei t ein fest gewähltes Element von T , für welches $\mu(t) \equiv 1 \pmod{n}$ ist. Da man für T die Restklassenzerlegung

$$(6.3) \quad F, Ft, Ft^2, \dots, Ft^{n-1}$$

nach F hat, lässt sich jedes Element von T in der Form

$$(6.4) \quad ft^x, \quad (f \text{ in } F, 0 \leq x \leq n-1)$$

schreiben. Das Element t^n liegt in F und sei mit

$$(6.5) \quad t^n = a$$

bezeichnet. Durch Transformation von F mit t erhält man einen zu der Abbildung τ gehörigen Automorphismus von F . Iteriert man diesen n Male, so erhält man denjenigen inneren Automorphismus von F , bei dem jedes Element von F mit dem ebenfalls zu F gehörigen Element a transformiert wird, und dieser gehört zu der identischen Abbildung τ^n von φ .

Nun ist F als Fundamentalgruppe einer Fläche vom Geschlecht p mit $r \geq 0$ Randkurven durch endlich viele Elemente erzeugbar, etwa durch die Elemente

$$(6.6) \quad f_1, f_2, \dots, f_h$$

mit gewissen definierenden Relationen. Man erhält dann eine neue Darstellung von T , indem man zu den Erzeugenden (6.6) mit den für sie geltenden Relationen noch die Erzeugende t mit der Relation (6.5) hinzufügt und als weitere Relationen hinschreibt, in welche Elemente die Erzeugenden (6.6) durch Transformation mit t übergehen.

Für diese Beschreibung der Abbildung τ von φ durch den in F induzierten Automorphismus soll nun in den folgenden Paragraphen eine *Normaldarstellung* gesucht werden. Dabei ist zwischen den Fällen $q > 0$ und $q = 0$ zu unterscheiden. Wir erhalten diese Normaldarstellung zunächst für unverzweigte Überlagerung von M durch φ und können daraus nachträglich ohne Mühe auch für den allgemeinen Fall der verzweigten Überlagerung eine Normal-

darstellung gewinnen. Es wird sich dabei zeigen, dass es zweckmässig ist, die Erzeugendenzahl h von F in (6.6) nicht immer so klein wie möglich zu halten.

7. Normaldarstellung im Falle $q > 0$. Wenn das Geschlecht q der Modulfläche M positiv ist, so sei das Erzeugendensystem (4.1) der Fundamentalgruppe T von M nach 5 so gewählt, dass $\mu(\alpha_1) \equiv 1 \pmod n$ ist und $\beta_1, \alpha_2, \dots, \beta_q$ nicht multipel sind. Dann kann α_1 die Rolle des in 6 mit t bezeichneten Elements von T übernehmen und soll dementsprechend mit t bezeichnet werden. Dabei ist nach der Bezeichnung (6.5)

$$(7.1) \quad t^n = a.$$

Die Elemente $\beta_1, \alpha_2, \dots, \beta_q$ gehören zu F und sollen hier zunächst mit $b_1, \alpha_2, \dots, b_q$ bezeichnet werden. Die μ -Werte der $s \geq 0$ Randkurven sind durch (4.5) gegeben. Dabei ist σ_ν nur als Restklasse nach dem Modul $\lambda_\nu = \frac{n}{m_\nu}$ bestimmt. Wir wollen hier für diese Restklassen ein System von ν repräsentierenden Zahlen, die wieder mit σ_ν bezeichnet werden, so auswählen, dass man an Stelle von (4.6)

$$(7.2) \quad \sigma_1 m_1 + \sigma_2 m_2 + \dots + \sigma_s m_s = 0$$

hat. Statt der Erzeugenden γ_ν führen wir neue Erzeugende

$$(7.3) \quad c_\nu = \gamma_\nu t^{-\sigma_\nu m_\nu} \quad \nu = 1, 2, \dots, s$$

ein, die zu F gehören, da $\mu(c_\nu) \equiv 0 \pmod n$ wird. Dann ist

$$(7.4) \quad \gamma_\nu = c_\nu t^{\sigma_\nu m_\nu} \quad \nu = 1, 2, \dots, s.$$

Somit hat man für T das Erzeugendensystem

$$(7.5) \quad t, b_1, \alpha_2, b_2, \dots, \alpha_q, b_q, c_1, c_2, \dots, c_s$$

und als einzige definierende Relation entsprechend (4.2)

$$(7.6) \quad \begin{aligned} &tb_1 t^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} \dots \\ &\dots a_q b_q a_q^{-1} b_q^{-1} c_1 t^{\sigma_1 m_1} c_2 t^{\sigma_2 m_2} \dots c_s t^{\sigma_s m_s} = 1. \end{aligned}$$

Im Falle $s > 0$ könnte man mittels (7.6) eine Erzeugende, etwa c_s , eliminieren und dadurch T durch ein System freier Erzeugender darstellen; aber teils würde dadurch die Gleichberechtigung der Randkurven nicht mehr in der formalen Darstellung zum Ausdruck kommen, teils würde der Fall $s = 0$ eine gesonderte Behandlung erfordern. Wir bleiben daher bei der Darstellung von T durch (7.5) und (7.6).

Nun suchen wir eine Darstellung des Normalteilers F von T . Unter den Erzeugenden (7.5) gehört nur t nicht zu F . Jedes Element von T lässt sich schreiben als ein Produkt von Transformaten der Erzeugenden b_1, \dots, c_s von (7.5) mit Potenzen von t , multipliziert mit einer Potenz t^x , und es gehört dann und nur dann zu F , wenn der Exponent x durch n teilbar ist.

Für diese Transformaten führen wir folgende Bezeichnungen ein:

$$(7.7) \quad \begin{aligned} a_{i,j} &= t^j a_i t^{-j} & i &= 2, 3, \dots, q \\ b_{i,j} &= t^j b_i t^{-j} & i &= 1, 2, 3, \dots, q \\ c_{\nu,j} &= t^j c_\nu t^{-j} & \nu &= 1, 2, 3, \dots, s. \end{aligned}$$

Dabei nimmt j alle Werte an, und $a_{i,0}, b_{i,0}, c_{\nu,0}$ bedeuten dasselbe wie a_i, b_i, c_ν . Ein in den Erzeugenden (7.5) geschriebener Ausdruck e ist dann und nur dann gleich 1 in T , wenn er sich identisch in diesen Erzeugenden in der Form eines Produktes

$$(7.8) \quad e \equiv \Pi(\psi R^{\pm 1} \psi^{-1})$$

schreiben lässt, wobei R das Relationswort in (7.6) und die Transformatoren ψ Ausdrücke in den Erzeugenden (7.5) sind. e hat also wegen (7.6) und (7.2) die Exponentensumme 0 in t . Da sich die ψ in der Form

$$\psi = \Phi(a_{i,j}, b_{i,j}, c_{\nu,j}) \cdot t^x$$

schreiben lassen, lässt sich (7.8) in die Form

$$(7.9) \quad e \equiv \Pi(\Phi R_x^{\pm 1} \Phi^{-1})$$

bringen, wobei

$$(7.10) \quad R_x = t^x R t^{-x}$$

gesetzt ist. Dabei sind die R_x ebenfalls Ausdrücke in den Elementen (7.7), weil t in R wegen (7.2) die Exponentensumme 0 hat.

Man hat also für F die Erzeugenden

$$(7.11) \quad t^n, a_{i,j}, b_{i,j}, c_{\nu,j}.$$

Ein Ausdruck in diesen, der gleich 1 sein soll, muss in t^n die Exponentensumme 0 haben, da er als Element von T in t die Exponentensumme 0 haben muss. Er lässt sich daher zunächst mittels der Relationen

$$(7.12) \quad \begin{aligned} t^n a_{i,j} t^{-n} &= a_{i,j+n} \\ t^n b_{i,j} t^{-n} &= b_{i,j+n} \\ t^n c_{\nu,j} t^{-n} &= c_{\nu,j+n} \end{aligned}$$

durch die $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{\nu,j}$ allein darstellen und dann iden-

tisch in diesen in die Form (7.9) bringen. Also sind die Relationen (7.12) zusammen mit den Relationen

$$(7.13) \quad R_x(a_{i,j}, b_{i,j}, c_{\nu,j}) = 1$$

vollständig für F . Benutzt man die Abkürzung

$$(7.14) \quad k_{i,j} = a_{i,j} b_{i,j} a_{i,j}^{-1} b_{i,j}^{-1} \quad i = 2, 3, \dots, q,$$

so erhält man explizit die Relationen (7.13) für $0 \leq x \leq n-1$ aus (7.6) und unter Benutzung von (7.2)

$$(7.15) \quad \begin{aligned} b_{1,1}^{-1} &= b_{1,0}^{-1} k_{2,0} \dots k_{q,0} c_{1,0} c_{2,\sigma_1 m_1} c_{3,\sigma_1 m_1 + \sigma_2 m_2} \dots c_{s,-\sigma_s m_s} \\ b_{1,2}^{-1} &= b_{1,1}^{-1} k_{2,1} \dots k_{q,1} c_{1,1} c_{2,\sigma_1 m_1 + 1} \dots c_{s,-\sigma_s m_s + 1} \\ &\text{---} \\ b_{1,n-1}^{-1} &= b_{1,n-2}^{-1} k_{2,n-2} \dots k_{q,n-2} c_{1,n-2} \dots c_{s,-\sigma_s m_s + n-2} \\ b_{1,n}^{-1} &= b_{1,n-1}^{-1} k_{2,n-1} \dots k_{q,n-1} c_{1,n-1} \dots c_{s,-\sigma_s m_s + n-1} \end{aligned}$$

Diese Darstellung von F lässt sich nun durch Elimination überflüssiger Erzeugender folgendermassen vereinfachen: Mittels (7.12) kann man alle diejenigen Erzeugenden (7.7) eliminieren, für welche j ausserhalb des Wertbereichs $0 \leq j \leq n-1$ liegt, und damit fallen die Relationen (7.12) fort. Weiter kann man sich dann auf die Auswahl (7.15) der Relationen (7.13) beschränken, da alle übrigen aus den n Relationen (7.15) durch Transformation mit Potenzen des in F gelegenen Elementes t^n hervorgehen. Ferner kann man mittels der ersten $n-1$ Relationen (7.15) successive $b_{1,1}, b_{1,2}, \dots, b_{1,n-1}$ eliminieren und in die letzte Relation (7.15) einsetzen. Dabei ist in dieser $b_{1,n}$ durch $t^n b_{1,0} t^{-n}$

zu ersetzen. Wir schreiben nun a statt l^n nach (7.1) und b statt $b_{1,0}$ und haben dadurch folgende Darstellung von F gewonnen:

Erzeugende von F:

$$(7.16) \quad \begin{matrix} a \\ b \\ a_{i,j} \\ b_{i,j} \\ c_{\nu,j} \end{matrix} \left. \begin{matrix} \\ \\ i = 2, 3, \dots, q \\ \\ \nu = 1, 2, \dots, s \end{matrix} \right\} \begin{matrix} \\ \\ \\ j = 0, 1, 2, \dots, n-1. \end{matrix}$$

Definierende Relation von F:

$$(7.17) \quad \begin{aligned} & aba^{-1}b^{-1}k_{2,0} \dots k_{q,0}c_{1,0}c_{2,\sigma_1 m_1}c_{3,\sigma_1 m_1 + \sigma_2 m_2} \dots c_{s,-\sigma_s m_s}k_{2,1} \dots \\ & \dots k_{q,1}c_{1,1} \dots c_{s,-\sigma_s m_s + 1}k_{2,2} \dots \dots \dots \\ & \dots k_{2,n-1} \dots k_{q,n-1}c_{1,n-1} \dots c_{s,-\sigma_s m_s + n-1} = 1. \end{aligned}$$

In dieser Schreibweise der Relation (7.17) wird zwar der zweite Index der Symbole c nicht immer dem Wertebereich von 0 bis $n - 1$ angehören, aber ein solches c ist dann nach der Formel

$$(7.18) \quad c_{\nu,j+xn} = a^x c_{\nu,j} a^{-x} \quad 0 \leqq j \leqq n-1$$

zu lesen. Diese Bemerkung ist auch im Folgenden für die Symbole c zu beachten.

F ist Fundamentalgruppe der Fläche φ vom Geschlecht p mit r Randkurven. Die Anzahl der Erzeugenden (7.16) von F ist $n [2(q - 1) + s] + 2$, und das ist wegen (3.2) gleich $2p + r$. Die ns Symbole $c_{\nu,j}$ kommen in (7.17) genau je einmal vor. Ist $s > 0$ (also auch $r > 0$ und φ berandet), so kann man mittels (7.17) genau eines der $c_{\nu,j}$ eliminieren und dadurch F als freie Gruppe mit $2p + r - 1$ freien Er-

zeugenden darstellen. Ist $s = 0$ (also auch $r = 0$ und q geschlossen), so fallen die Symbole c überall fort; dann hat man $2p$ Erzeugende in (7.16) und als Relation (7.17) das Produkt der p Kommutatoren gleich 1, also die bekannte kanonische Form für F . — Aus diesen Bemerkungen ergibt sich die Vollständigkeit der Relation (7.17) für die Erzeugenden (7.16) auch unmittelbar aus der Bedeutung von F , ohne Bezugnahme auf die vorhergehende formale Rechnung.

Für den in dem Normalteiler F von T durch die Transformation mit t induzierten Automorphismus I erhält man die folgende Darstellung:

$$\begin{aligned}
 (7.19) \quad & ta\bar{t}^{-1} = a \\
 & tbt^{-1} = [b^{-1}k_{2,0} \dots k_{q,0}c_{1,0}c_{2,\sigma_1 m_1} \dots c_{s,-\sigma_s m_s}]^{-1} \\
 & \left. \begin{aligned} ta_{i,j}\bar{t}^{-1} &= a_{i,j+1} \\ tb_{i,j}\bar{t}^{-1} &= b_{i,j+1} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} & i = 2, 3, \dots, q \\ & j = 0, 1, 2, \dots, n-2 \end{aligned} \\
 & tc_{\nu,j}\bar{t}^{-1} = c_{\nu,j+1} \quad \nu = 1, 2, \dots, s \\
 & \left. \begin{aligned} ta_{i,n-1}\bar{t}^{-1} &= aa_{i,0}a^{-1} \\ tb_{i,n-1}\bar{t}^{-1} &= ab_{i,0}a^{-1} \end{aligned} \right\} i = 2, 3, \dots, q \\
 & tc_{\nu,n-1}\bar{t}^{-1} = ac_{\nu,0}a^{-1} \quad \nu = 1, 2, \dots, s.
 \end{aligned}$$

Iteriert man diesen Automorphismus n Male, so sieht man, dass I^n derjenige *innere* Automorphismus von F ist, bei welchem jedes Element f von F in afa^{-1} übergeht. Für das Element b ist dabei die Relation (7.17) zu beachten.

Durch Transformation mit t geht das Relationswort (7.17) in eine Transformierte seiner selbst, nämlich in den mit

$$[ak_{2,0} \dots k_{q,0}c_{1,0} \dots c_{s,-\sigma_s m_s} a^{-1}]^{-1}$$

transformierten Ausdruck über.

Damit ist die gewünschte Normaldarstellung des zu der Abbildung τ von φ gehörigen Automorphismus von F für $q > 0$ gefunden. Ist φ geschlossen, also $s = 0$, so sind die Symbole $c_{\nu,j}$ einfach überall fortzulassen.

Stellt man die Gesamtgruppe T dadurch dar, dass man als Erzeugende die Elemente (7.16) und dazu noch t nimmt, so bilden die Relationen (7.1), (7.17) und (7.19) ein vollständiges System definierender Relationen für diese Erzeugendenwahl. Denn mittels (7.19) und (7.1) kann man jedes Potenzprodukt dieser Erzeugenden in die Form (6.4) bringen, und für F allein ist (7.17) vollständig.

Im Falle $s > 0$ wollen wir noch unser Augenmerk auf die Elemente γ_ν , $\nu = 1, 2, \dots, s$, von T richten, von denen wir am Anfang dieses Paragraphen zu den neuen Erzeugenden c_ν übergangen. Wegen (7.4) ist $\gamma_\nu^{\lambda_\nu}$ die niedrigste Potenz von γ_ν , die zu F gehört, und es ist

$$(7.20) \quad \gamma_\nu^{\lambda_\nu} = \left(c_\nu t^{\sigma_\nu m_\nu} \right)^{\lambda_\nu} = c_{\nu,0} c_{\nu,\sigma_\nu m_\nu} c_{\nu,2\sigma_\nu m_\nu} \dots c_{\nu,(\lambda_\nu-1)\sigma_\nu m_\nu} t^{\sigma_\nu m_\nu \lambda_\nu}.$$

Der letzte Faktor ist a^{σ_ν} wegen (1.3) und (7.1). Das Element (7.20) werde mit $g_{\nu,0}$ und seine Transformaten durch t^l für $l = 1, 2, \dots, m_\nu - 1$ mit $g_{\nu,1}, \dots, g_{\nu,m_\nu-1}$ bezeichnet:

$$(7.21) \quad g_{\nu,l} = t^l g_{\nu,0} t^{-l} = t^l \gamma_\nu^{\lambda_\nu} t^{-l} \quad \begin{array}{l} \nu = 1, 2, \dots, s \\ l = 0, 1, 2, \dots, m_\nu - 1. \end{array}$$

Zufolge (7.20) findet man für diese Elemente von F die Darstellungen:

$$(7.22) \quad \begin{array}{l} g_{\nu,0} = c_{\nu,0} c_{\nu,\sigma_\nu m_\nu} c_{\nu,2\sigma_\nu m_\nu} \dots c_{\nu,(\lambda_\nu-1)\sigma_\nu m_\nu} \cdot a^{\sigma_\nu} \\ g_{\nu,1} = c_{\nu,1} c_{\nu,\sigma_\nu m_\nu+1} c_{\nu,2\sigma_\nu m_\nu+1} \dots c_{\nu,(\lambda_\nu-1)\sigma_\nu m_\nu+1} \cdot a^{\sigma_\nu} \\ \text{---} \\ g_{\nu,m_\nu-1} = c_{\nu,m_\nu-1} c_{\nu,\sigma_\nu m_\nu+m_\nu-1} \dots c_{\nu,(\lambda_\nu-1)\sigma_\nu m_\nu+m_\nu-1} \cdot a^{\sigma_\nu}. \end{array}$$

Transformiert man dies letzte Element mit t , so erhält man

$$(7.23) \quad tg_{\nu, m_\nu - 1} t^{-1} = c_{\nu, m_\nu} c_{\nu, m_\nu + \sigma_\nu, m_\nu} c_{\nu, m_\nu + 2\sigma_\nu, m_\nu} \cdots \\ \cdots c_{\nu, m_\nu + (\lambda_\nu - 1)\sigma_\nu, m_\nu} \cdot a^{\sigma_\nu}.$$

Ist, entsprechend (2.5),

$$\delta_\nu \sigma_\nu = 1 + x_\nu \lambda_\nu, \quad 0 < \delta_\nu < \lambda_\nu,$$

so kommt in $g_{\nu, 0}$ der Faktor

$$c_{\nu, \delta_\nu \sigma_\nu, m_\nu} = c_{\nu, m_\nu + x_\nu n} = a^{x_\nu} c_{\nu, m_\nu} a^{-x_\nu}$$

vor, und man erkennt, dass

$$a^{x_\nu} tg_{\nu, m_\nu - 1} t^{-1} a^{-x_\nu} \\ = [c_{\nu, 0} \cdots c_{\nu, (\delta_\nu - 1)\sigma_\nu, m_\nu}]^{-1} g_{\nu, 0} [c_{\nu, 0} \cdots c_{\nu, (\delta_\nu - 1)\sigma_\nu, m_\nu}]$$

ist. Also ist (7.23) die Transformierte von $g_{\nu, 0}$ mit dem zu F gehörigen Element

$$(7.24) \quad \left[c_{\nu, 0} c_{\nu, \sigma_\nu, m_\nu} \cdots c_{\nu, (\delta_\nu - 1)\sigma_\nu, m_\nu} a^{\frac{\delta_\nu \sigma_\nu - 1}{\lambda_\nu}} \right]^{-1} = d_\nu.$$

Man hat also:

$$(7.25) \quad \left. \begin{aligned} tg_{\nu, l} t^{-1} &= g_{\nu, l+1} & 0 \leq l \leq m_\nu - 2 \\ tg_{\nu, m_\nu - 1} t^{-1} &= d_\nu g_{\nu, 0} d_\nu^{-1} \end{aligned} \right\} \nu = 1, 2, \dots, s.$$

Diese Formeln drücken den folgenden Sachverhalt aus: Über der ν -ten Randkurve von M , die in Fig. 1 durch die Kurve γ_ν umlaufen wurde, liegen m_ν Kurven von φ , die sich je erst nach λ_ν -fachem Umlauf um die Spurkurve schliessen: Die diesen m_ν Kurven von φ entsprechenden m_ν

Elementklassen von F werden durch die Elemente (7.22) repräsentiert. Bei der Abbildung τ von \mathcal{g} vertauschen sich die m_ν Kurven zyklisch: Bei Transformation mit t geht $g_{\nu,l}$ nach (7.25) in $g_{\nu,l+1}$ über für $l = 0, \dots, m_\nu - 2$ und $g_{\nu,m_\nu-1}$ in ein Element derselben Elementklasse von F wie $g_{\nu,0}$. Bei der Abbildung τ^m werden die m_ν Kurven Fixkurven mit der Drehzahl $\frac{\delta_\nu}{\lambda_\nu}$: Bei Transformation mit t^m bleiben die Elemente $g_{\nu,l}$ innerhalb ihrer Elementklasse in F , und die Drehzahl geht aus der Gestalt des Transformators (siehe (7.24)) hervor.

Die beiden extremen Fälle $m_\nu = 1$, $\lambda_\nu = n$ und $m_\nu = n$, $\lambda_\nu = 1$ werden hierbei sinngemäss mit umfasst.

Die m_ν Elemente (7.22) enthalten zusammen mit Rücksicht auf (7.18) jede der Erzeugenden $c_{\nu,j}$, $0 \leq j \leq n-1$, genau einmal.

8. Normaldarstellung im Falle $q = 0$. Dass der Fall, in welchem die Modulfläche M das Geschlecht 0 hat, eine gesonderte Behandlung erfordert, hat folgenden Grund: Im Falle $q > 0$ konnte man ein für die Zerlegung (6.3) brauchbares Element t von T ausserhalb der durch das Teilsystem $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ von (4.1) erzeugten Untergruppe von T wählen; im Falle $q = 0$ macht diese Untergruppe ganz T aus.

Es sei $q = 0$. Dann gibt es, wie schon in 6 benutzt, multiple Randkurven, und zwar wegen (4.6) mindestens zwei. Nach 6 können wir dabei sogleich $s \geq 3$ annehmen. Nach (4.1) und (4.2) hat man für T das Erzeugendensystem

$$(8.1) \quad \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_s$$

mit der definierenden Relation

$$(8.2) \quad \gamma_1 \gamma_2 \dots \gamma_s = 1.$$

T ist somit eine freie Gruppe, und wir wählen die Elemente

$$(8.3) \quad \gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s-1}$$

als ein System freier Erzeugender für T . Wegen (4.5), (4.6) und (4.7) ist dabei

$$(8.4) \quad (\sigma_1 m_1, \sigma_2 m_2, \dots, \sigma_{s-1} m_{s-1}, n) = 1.$$

Da es nach 5 auf die Reihenfolge der γ_ν nicht ankommt und $s \geq 3$ angenommen wurde, kann man die Bezeichnung so wählen, dass auch unter den (8.3) entsprechenden Kurven mindestens zwei multiple vorkommen, also solche, deren m -Wert eine in n aufgehende Zahl kleiner als n ist. Sei etwa m_1 die kleinste der Zahlen m_1, m_2, \dots, m_{s-1} , und es sei etwa auch $m_2 < n$. Ersetzt man dann γ_2 durch $\gamma_2 \gamma_1^x$ und lässt die übrigen Erzeugenden (8.3) ungeändert, wodurch man zu einem neuen System freier Erzeugender für T übergeht, so kann man durch passende Wahl von x erreichen, dass $\mu(\gamma_2 \gamma_1^x) \equiv 0 \pmod n$ ist, falls m_1 in m_2 aufgeht, und dass $(\mu(\gamma_2 \gamma_1^x), n) < m_1$ ist, falls m_1 nicht in m_2 aufgeht. Durch fortgesetzte Anwendung solcher Erzeugendenwechsel kann man daher wegen (8.4) offenbar zu einem neuen System freier Erzeugender für T gelangen, bei dem der μ -Wert einer Erzeugenden $\equiv 1$ und derjenige der übrigen $\equiv 0 \pmod n$ ist. Die erstere wählen wir als das t von (6.3) und bezeichnen das Erzeugendensystem mit

$$(8.5) \quad t, f_{1,0}, f_{2,0}, \dots, f_{s-2,0}.$$

Die Elemente $f_{i,0}$ gehören dabei zu F . Um alle Elemente von T auf die Form (6.4) zu bringen, hat man noch die Transformaten

$$(8.6) \quad f_{i,j} = t^j f_{i,0} t^{-j} \quad i = 1, 2, \dots, s-2$$

für alle Werte von j einzuführen. Dann ist das f der Formel

(6.4) ein Produkt der $f_{i,j}$, und das Element (6.4) gehört dann und nur dann zu F , wenn n in x aufgeht. Setzen wir noch wie in (6.5)

$$(8.7) \quad t^n = a,$$

so hat man ebenso wie in (7.18)

$$(8.8) \quad f_{i,j+xn} = a^x f_{i,j} a^{-x} \quad 0 \leq j \leq n-1,$$

und kann daher nach Einführung des Elements a von F alle diejenigen Elemente (8.6), deren zweiter Index ausserhalb des Wertbereiches von 0 bis $n-1$ liegt, mittels (8.8) eliminieren. Man gewinnt dadurch das folgende

System freier Erzeugender von F :

$$(8.9) \quad \begin{array}{c} a \\ f_{i,j} \end{array} \quad i = 1, 2, \dots, s-2; \quad j = 0, 1, \dots, n-1.$$

Dass in der Tat keine Relationen zwischen den Erzeugenden (8.9) von F bestehen, kann man formal aus dem Verfahren bei ihrer Herstellung ähnlich wie in 7 nachweisen. Einfacher erschliesst man es aus der Bedeutung von F , wie dies auch in 7 angedeutet wurde: F ist als Fundamentalgruppe einer Fläche φ vom Geschlecht p mit $r > 0$ Randkurven eine freie Gruppe mit $2p + r - 1$ freien Erzeugenden. Die Anzahl der in (8.9) verwendeten Erzeugenden von F ist $n(s-2) + 1$, und wegen $q = 0$ und (3.2) ist dies gleich der Minimalzahl $2p + r - 1$, woraus nach einer bekannten Eigenschaft freier Gruppen die Freiheit des Systems (8.9) folgt. Vgl. [15, § 5].

Für den in dem Normalteiler F von T durch die Transformation mit t induzierten Automorphismus I erhält man die Darstellung:

$$(8.10) \quad \left. \begin{aligned} taf^{-1} &= a \\ tf_{i,j}t^{-1} &= f_{i,j+1} \quad 0 \leq j \leq n-2 \\ tf_{i,n-1}t^{-1} &= af_{i,0}a^{-1} \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, s-2.$$

I^n ist wieder der innere Automorphismus $f \rightarrow af a^{-1}$ von F .

Damit ist die gewünschte Normaldarstellung des zu der Abbildung τ von φ gehörigen Automorphismus von F für $q = 0$ gefunden.

Stellt man T dadurch dar, dass man zu den Erzeugenden (8.9) noch t hinzunimmt, so bilden (8.7) und (8.10) ein vollständiges System definierender Relationen.

Wie in (7.21) sollen nun noch die Elemente

$$(8.11) \quad g_{\nu,l} = t^l g_{\nu,0} t^{-l} = t^l \gamma_{\nu}^l t^{-l} \quad \begin{array}{l} l = 0, 1, 2, \dots, m_{\nu}-1 \\ \nu = 1, 2, \dots, s \end{array}$$

aufgestellt werden. Die Elemente γ_{ν} sind eindeutig bestimmte Ausdrücke in den Erzeugenden (8.5) von T :

$$(8.12) \quad \gamma_{\nu} = II_{\nu}(t, f_{i,0}).$$

Durch Einführung der Elemente (8.6) ergeben sich aus (8.12) eindeutige Darstellungen

$$(8.13) \quad \gamma_{\nu} = c_{\nu}(f_{i,j}) t^{\sigma_{\nu} m_{\nu}}.$$

Diese Gleichung entspricht (7.4). Hier bilden jedoch die Elemente c_{ν} von F nicht einen Teil der Erzeugenden von F wie in 7, sondern werden nur als Abkürzung für gewisse Potenzprodukte der Erzeugenden (8.9) von F benutzt; man bedenke dabei, dass der Index j in (8.13) nicht beschränkt ist, dass man aber jederzeit mittels (8.8) auf das Erzeugendensystem (8.9) von F zurückgehen kann. Ferner beachte man, dass der Exponent $\sigma_{\nu} m_{\nu}$ von t in (8.13) hier

eine bestimmte Zahl ist und nicht wie in 7 in einer bestimmten Restklasse mod n beliebig wählbar ist.

Nun ist nach (8.13) für beliebiges ϱ

$$(8.14) \quad t^\varrho \gamma_\nu t^{-\varrho} = c_\nu (f_{i,j+\varrho}) t^{\sigma_\nu m_\nu}.$$

Um volle Übereinstimmung mit der Schreibweise von 7 zu erzielen, setzen wir

$$(8.15) \quad c_{\nu,\varrho}(f_{i,j}) = c_\nu(f_{i,j+\varrho}) \quad (c_{\nu,0} = c_\nu).$$

Dann genügen die $c_{\nu,\varrho}$ der Gleichung (7.18). Nun werden die durch (8.11) definierten Elemente $g_{\nu,i}$ von F durch (7.22) angegeben, indem sich an den Formeln (7.20–25) nichts ändert und auch die am Schluss von 7 beschriebene Beziehung zur Flächenabbildung τ in Kraft bleibt.

Die Relation (8.2), die ja die einzige Relation zwischen den γ_ν darstellt, hat Beziehungen einerseits zwischen den Zahlen $\sigma_\nu m_\nu$, andererseits zwischen den Elementen $c_{\nu,\varrho}$ zur Folge. Nach (8.2) und (8.13) ist

$$\begin{aligned} 1 &= \gamma_1 \gamma_2 \cdots \gamma_s = c_{1,0} t^{\sigma_1 m_1} c_{2,0} t^{\sigma_2 m_2} \cdots c_{s,0} t^{\sigma_s m_s} \\ &= c_{1,0} c_{2,\sigma_1 m_1} c_{3,\sigma_1 m_1 + \sigma_2 m_2} \cdots c_{s,\sigma_1 m_1 + \cdots + \sigma_{s-1} m_{s-1}} t^{\sigma_1 m_1 + \cdots + \sigma_s m_s}. \end{aligned}$$

Diese Relation wird eine Identität, wenn man mittels (8.15) und (8.8) auf die freien Erzeugenden (8.9) von F zurückgeht, und da a dabei mit der Exponentensumme 0 auftreten muss, sieht man erstens, dass die Zahlen $\sigma_\nu m_\nu$, die sich, wie oben bemerkt, zwangsläufig ergeben haben, auch hier der Relation (7.2) genügen, und zweitens, dass sich zwischen den $c_{\nu,\varrho}$ Relationen ergeben, die mit (7.15) übereinstimmen, wenn man dort alle $b_{1,j}$ und alle $k_{i,j}$ durch 1 ersetzt:

$$\begin{aligned}
 (8.16) \quad & c_{1,0} c_{2,\sigma_1 m_1} \cdots \cdots \cdots c_{s,-\sigma_s m_s} = 1 \\
 & c_{1,1} c_{2,\sigma_1 m_1 + 1} \cdots \cdots \cdots c_{s,-\sigma_s m_s + 1} = 1 \\
 & \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \text{---} \\
 & c_{1,n-1} c_{2,\sigma_1 m_1 + n-1} \cdots \cdots c_{s,-\sigma_s m_s + n-1} = 1.
 \end{aligned}$$

Eine weitere Beziehung zwischen den $c_{\nu,q}$ erhält man daraus, dass das Element t von T sich durch die Elemente (8.3) ausdrücken lässt, so wie es am Anfang dieses Paragraphen durch fortgesetzten Erzeugendenwechsel geschah. Es sei

$$(8.17) \quad t = \Pi(\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_{s-1}),$$

also

$$(8.18) \quad \bar{t}^{-1} \Pi(c_1 t^{\sigma_1 m_1}, c_2 t^{\sigma_2 m_2}, \dots, c_{s-1} t^{\sigma_{s-1} m_{s-1}}) = 1.$$

Bei Übergang zu den Erzeugenden (8.5) sieht man, dass t in (8.18) die Exponentensumme 0 haben muss. Also kann (8.18) in der Form eines Produktes Φ der $c_{\nu,q}$

$$(8.19) \quad \Phi(c_{\nu,q}) = 1$$

geschrieben werden. Man erhält die n Relationen

$$(8.20) \quad \Phi(c_{\nu,q+z}) = 1 \quad 0 \leq z \leq n-1.$$

Hierin kommt der Wert s für q nicht vor. Weitere Werte von z ergeben nichts neues, wenn man den zweiten Index der c durch (7.18) reduziert.

Die $2n$ Relationen (8.16) und (8.20) zwischen den $c_{\nu,q}$, oder zwischen a und den $c_{\nu,q}$, wenn man deren zweiten Index durch (7.18) reduziert, werden natürlich zu Identitäten, wenn man auf die Erzeugenden (8.9) von F zurückgeht. Sie stellen ein vollständiges System von Relationen zwischen den durch die Gleichungen (8.13) definierten Ele-

menten c_ν von F und ihren Transformaten durch die Potenzen von t dar.

Daraus lässt sich eine neue Normalform des Automorphismus von F für $q = 0$ gewinnen. Denn wegen (8.13) und (8.1) kann man T durch die Elemente

$$(8.21) \quad t, c_1, c_2, \dots, c_s,$$

also F durch die Elemente

$$(8.22) \quad a, c_{\nu, q} \quad \nu = 1, 2, \dots, s \quad q = 0, 1, \dots, n-1$$

darstellen. Dann bilden (8.16) und (8.20) ein vollständiges Relationssystem für die Erzeugenden (8.22), wobei man den zweiten Index der c zu reduzieren hat, und der Automorphismus von F ist durch

$$(8.23) \quad \left. \begin{aligned} taf^{-1} &= a \\ tc_{\nu, q} f^{-1} &= c_{\nu, q+1} \quad 0 \leq q \leq n-2 \\ tc_{\nu, n-1} f^{-1} &= ac_{\nu, 0} a^{-1} \end{aligned} \right\} \nu = 1, 2, \dots, s$$

gegeben. Dabei kann man, wenn man will, durch (8.16) z. B. die n Erzeugenden $c_{s, q}$, $0 \leq q \leq n-1$, eliminieren.

Die Normalform (8.9–10) ist insofern einfacher, als sie auf einer relationsfreien Darstellung von F fusst. Bei (8.22–23) benutzt man als Erzeugende diejenigen Elemente $c_{\nu, q}$, die man in (7.22) zur Darstellung der $g_{\nu, l}$ benötigt. Dabei tritt in den Relationen (8.20) ein Potenzprodukt Φ auf, dessen Form nicht allgemein angebar ist, da sie von den Valenzen der s Randkurven abhängt. Sie kann natürlich in besonderen Fällen sehr einfach werden. Ist z. B. $\mu(\gamma_1) \equiv 1 \pmod{n}$, so kann man $t = \gamma_1$ setzen, und die Relationen (8.20) lauten dann einfach $c_{1, q} = 1$, $0 \leq q \leq n-1$. Man kommt dann sofort auf eine Darstellung von F mittels der freien Erzeugenden a und $c_{\nu, q}$ für $\nu = 2, \dots, s-1$.

Zum näheren Vergleich der in 7 bzw. 8 behandelten Fälle $q > 0$ bzw. $q = 0$ sei noch folgende Bemerkung hinzugefügt: Wenn man für $q > 0$ nicht von dem Ergebnis von 5 Gebrauch macht, sondern bei einem beliebigen Erzeugendensystem (4.1) von T mit der Relation (4.2) stehen bleibt, hat man eine (8.17) entsprechende Gleichung

$$t = II(\alpha_1, \dots, \gamma_s)$$

anzusetzen, und bekommt entsprechend (8.20) ein System von n Relationen

$$\Phi(a_{i,j+z}, b_{i,j+z}, c_{\nu,j+z}) = 1 \quad 0 \leq z \leq n-1,$$

und entsprechend (8.16) ein System von n Relationen, das eine Verallgemeinerung von (7.15) darstellt. Dann liesse sich eine für $q > 0$ und $q = 0$ gemeinsam gültige Normalform des Automorphismus von F angeben, sodass man nicht zwischen diesen beiden Fällen zu unterscheiden brauchte. Die Unterscheidung wird also dadurch nötig, dass wir die Normalformen so weit vereinfachen, dass sie keine nicht allgemein näher angebbaren Potenzprodukte Φ enthalten.

9. Zusätzliche Relationen bei Verzweigkeit. In 3 wurde der Fall, dass Fixpunkte bei der Flächenabbildung τ oder solchen Potenzen von τ , deren Exponenten echte Teiler von n sind, auftreten, also dass φ über M verzweigt ist, dadurch auf den Fall der Unverzweigkeit zurückgeführt, dass Elementarflächenstücke um die Verzweigungspunkte aus M ausgeschnitten wurden, wodurch multiple Ränder statt der Verzweigungspunkte entstanden. Wir haben zu untersuchen, was es für die Fundamentalgruppe F und ihren in 7 und 8 dargestellten Automorphismus I bedeutet, wenn wir diesen Prozess wieder rückgängig machen.

Es sei etwa die ν -te Randkurve von M durch Ausschneidung eines ursprünglichen Verzweigungspunktes von M entstanden. Sie ist daher multipel, also $n \geq \lambda_\nu > 1$, $1 \leq m_\nu < n$. Die Schliessung dieser Randkurve von M durch ein Elementarflächenstück erfordert die Schliessung der sie überlagernden m_ν Randkurven von φ durch m_ν Elementarflächenstücke. Das bedeutet die Ersetzung der diesen m_ν Randkurven von φ entsprechenden Elementklassen von F durch die Identität. Diese Elementklassen werden nun, wie am Schluss von 7 hervorgehoben, gerade durch die m_ν Elemente (7.22) für den betreffenden Wert ν repräsentiert. Die Wiedereinführung dieser Verzweigungsstelle von φ über M hat also für F nur die Wirkung, dass man unter Beibehaltung des benutzten Erzeugendensystems (7.16) bzw. (8.9) (für $q > 0$ bzw. $q = 0$) die Relationen

$$(9.1) \quad c_{\nu,0} c_{\nu,\sigma_\nu m_\nu} \cdots c_{\nu,(\lambda_\nu-1)\sigma_\nu m_\nu} \cdot a^{\sigma_\nu} = 1$$

$$c_{\nu,m_\nu-1} c_{\nu,\sigma_\nu m_\nu + m_\nu - 1} \cdots c_{\nu,(\lambda_\nu-1)\sigma_\nu m_\nu + m_\nu - 1} \cdot a^{\sigma_\nu} = 1$$

hinzuzufügen hat. Man hat dabei zu bedenken, dass die $c_{\nu,q}$ im Falle $q = 0$ zur Abkürzung für gewisse Ausdrücke in den Erzeugenden (8.9) stehen, während sie im Falle $q > 0$ selbst zu den benutzten Erzeugenden gehören (oder Erzeugende transformiert mit Potenzen von a sind).

Stellt man in dieser Weise mehrere Verzweigungsstellen wieder her, so hat man Relationssysteme (9.1) für mehrere Werte von ν hinzuzufügen. Ist φ geschlossen, so bestehen die Relationen (9.1) für alle Werte von ν .

An der Darstellung des Automorphismus I von F durch (7.19) bzw. (8.10) ist dabei nichts zu ändern. *Daher sind (7.19) bzw. (8.10) auch Normaldarstellungen des Automor-*

phismus von F für den Fall, dass bei der periodischen Abbildung τ der geschlossenen oder berandeten Fläche φ , oder bei den Potenzen von τ , Fixpunkte auftreten.

Man sieht, dass die benutzte Darstellung von F durch Erzeugende und definierende Relationen der betreffenden periodischen Abbildung τ so angepasst ist, dass sie die Fixpunkte in Evidenz setzt: Ein Fixpunkt bei τ selbst hat eine Einzelrelation (9.1) zur Folge (also $m_\nu = 1$, $\lambda_\nu = n$); deren linke Seite geht bei dem Automorphismus I von F in eine Transformierte ihrer selbst über und lässt dabei die zu dem Fixpunkt bei τ gehörige Drehzahl $\frac{\delta}{n}$ erkennen; siehe (7.24) für $m_\nu = 1$, $\lambda_\nu = n$. Ein Fixpunkt, der erstmalig bei τ^m , wo m ein Teiler von n und $1 < m < n$ ist, auftritt, gehört einem System von m Punkten von φ an, die sich bei τ , τ^2 , \dots , τ^{m-1} vertauschen und alle gleichzeitig bei τ^m Fixpunkte werden; sie haben m Relationen von F zur Folge, die ein System (9.1) bilden ($m_\nu = m$, $\lambda_\nu = \frac{n}{m}$). Deren linke Seiten vertauschen sich bei I so, wie durch (7.25) angegeben. Bei I^m geht jede in eine Transformierte von sich über und lässt dabei die zu den m Fixpunkten gehörige gemeinsame Drehzahl $\frac{\delta}{\lambda}$ erkennen. Insbesondere sieht man:

In der Normaldarstellung entspricht jedem multiplen Punkt von φ genau eine Relation von F . Für $q=0$ gibt es keine weiteren Relationen als diese, für $q > 0$ noch genau eine, nämlich (7.17).

Der durch (7.19) bzw. (8.10) gegebene Automorphismus I von F hat in allen Fällen zugleich die Form eines Automorphismus der durch die betreffenden Erzeugenden hervorgebrachten freien Gruppe. Sein Charakter als Automorphismus der mit Relationen behafteten Gruppe F tritt

unmittelbar dadurch zu Tage, dass er offensichtlich das Relationssystem in ein äquivalentes überführt.

Wie in 7 und 8 hervorgehoben, ergibt sich aus der Darstellung von F und dem Automorphismus I auch eine Darstellung von T , indem man einerseits eine weitere Erzeugende, nämlich t , zu den Erzeugenden von F hinzunimmt, andererseits die Relation $t^n = a$ und die Relationen (7.19) bzw. (8.10) zu den für F bestehenden Relationen hinzufügt. Deshalb bedeutet die Hinzunahme eines Relationssystems (9.1) nicht nur für F sondern auch für T den Übergang zu einer Faktorgruppe. Bezeichnen wir diese Faktorgruppen für den Augenblick mit F' und T' , so ist $\frac{T'}{F'}$ die zyklische Gruppe n -ter Ordnung, ebenso wie $\frac{T}{F}$.

Nun zeigen (7.21) und (7.22), dass die Hinzufügung der m_ν Relationen (9.1) für T dasselbe bedeutet, wie die Hinzufügung der einen Relation

$$(9.2) \quad \gamma_\nu^{\lambda_\nu} = 1,$$

also mit Benutzung der in der Normaldarstellung verwendeten Erzeugenden (siehe (7.4) und (8.13))

$$(9.3) \quad (c_\nu t^{\sigma_\nu m_\nu})^{\lambda_\nu} = 1.$$

Dies bedeutet das Auftreten von *Elementen endlicher Ordnung* in T' , während es in T keine gab.

T' ist nicht etwa die Fundamentalgruppe der Modulfläche nach Schliessung der ν -ten Randkurve; denn diese würde durch Hinzufügung der Relation $\gamma_\nu = 1$ zu T entstehen. Statt dessen wird ja nur (9.2) gefordert, und es ist $\lambda_\nu > 1$. Man kann T' so erklären: Wie T die Decktransformationsgruppe der universellen Überlagerungsfläche Φ von M über M ist, so ist T' die Decktransformations-

gruppe einer schwächeren Überlagerungsfläche Φ' von M , bei der jede Deckkurve der ν -ten Randkurve von M sich nach λ_ν Umläufen schliesst. M. a. W. Φ' entsteht aus Φ durch Reduktion modulo derjenigen Untergruppe von T , die von allen Transformaten des Elements $\gamma_\nu^{\lambda_\nu}$ erzeugt wird. Dann gilt analog mit (6.1) und (6.2)

$$(9.4) \quad M = \Phi' \bmod T'$$

$$(9.5) \quad \varphi = \Phi' \bmod F',$$

und $\frac{T'}{F'}$ entspricht wieder der Decktransformationsgruppe von φ über M , d. h. der periodischen Abbildung τ . Das bleibt richtig, wenn man nun das ν -te Loch schliesst, und Φ' kann dann wieder durch einen Bereich der hyperbolischen Ebene dargestellt werden, wie in 6. Dabei wird dann $\gamma_\nu = c_\nu t^{\sigma_\nu m_\nu}$ in T' eine *elliptische Substitution* der Ordnung λ_ν und mit der Drehzahl $\frac{1}{\lambda_\nu}$, während es in T nur hyperbolische Substitutionen gab.

Diese Betrachtungen wiederholen sich bei Schliessung weiterer Randkurven, indem man dadurch wieder zu Faktorgruppen F'' und T'' von F' und T' übergeht. Um der einfachen Ausdrucksweise willen behalten wir die Bezeichnung F und T für diese Gruppen ebenso wie Φ , φ und M für die Flächen auch nach Schliessung von Rändern bei. Dann ist immer F die Fundamentalgruppe von φ , und das ist die Decktransformationsgruppe von Φ über φ , und $\frac{T}{F}$ stellt die Decktransformationsgruppe von φ über M , also die periodische Abbildung τ , dar. Aber T ist nur dann die Fundamentalgruppe von M und Φ nur dann die universelle Überlagerungsfläche von M , wenn keine Schliessung multipler Randkurven stattgefunden hat, m. a. W., wenn es keine multiplen Punkte, also keine Relationen (9.1) gibt.

Eine besondere Erwähnung verdient der Fall, dass es Punkte der Multiplizität n gibt. Es entspreche z. B. dem Werte $\nu = 1$ ein solcher, also $m_1 = 1$, $\lambda_1 = n$. Die Relation (9.1) lautet dann

$$c_{1,0} c_{1,\sigma_1} \cdots c_{1,(n-1)\sigma_1} \cdot a^{\sigma_1} = 1$$

oder in der Form (9.3)

$$(c_1 l^{\sigma_1})^n = 1.$$

Es gibt also Elemente n -ter Ordnung in T und daher auch in der Restklasse Ft der Zerlegung (6.3). Es gibt demnach ein f in F so, dass

$$(9.6) \quad (ft)^n = 1$$

ist. Erstattet man t durch ft , so bedeutet das den Übergang von I zu einem damit verwandten I_1 , nämlich die Hinzufügung des zu f gehörigen inneren Automorphismus von F . Und nun ist I_1^n der identische Automorphismus, da (9.6) an die Stelle von (6.5) tritt. Man sieht also:

Dann und nur dann, wenn $\tau\varphi$ Fixpunkte hat, gibt es in der zu τ gehörigen Automorphismenfamilie Automorphismen endlicher Ordnung.

Notwendige und hinreichende Bedingung dafür ist m. a. W., dass T Elemente n -ter Ordnung enthält. Da aus unserer Normaldarstellung zugleich eine Darstellung der ganzen Familie von I folgt, wird daher speziell eine Normaldarstellung aller Automorphismen endlicher Ordnung der Fundamentalgruppen geschlossener oder berandeter Flächen, soweit sie durch periodische Abbildungen induziert werden können, umfasst. Ob zu allen Automorphismen endlicher Ordnung von F periodische Abbildungen τ von φ gehören, wird dadurch nicht entschieden.

10. Strukturbeschreibung auf Grund der Normaldarstellung. Man übersieht die Struktur einer n -periodischen Abbildung τ von φ , wenn man φ in n Bereiche einteilen und die zyklische Vertauschung dieser Bereiche bei τ in einfacher Weise beschreiben kann. Jeder der n Bereiche stellt dabei eine genau einmalige Überdeckung der Modulfläche M dar. Dabei genügt es, wie schon in 3 erwähnt, diese Strukturbeschreibung für den Fall der Unverzweichtigkeit, also bei Abwesenheit von multiplen Punkten, durchzuführen, da die Erweiterung der Abbildung auf die Elementarflächenstücke, durch die man eventuell multiple Randkurven zu schliessen hat, eine wohlbekannt einfache Struktur hat (Rotationssatz von B. v. KERÉKJÁRTÓ [5, 6]). Man benutzt nun am einfachsten die Überlagerungsfläche Φ von φ und M , in der diese Bereiche kongruente Fundamentalbereiche für die Gruppe T von hyperbolischen Bewegungen sind. Diese Bereiche sind in Φ in unendlicher Zahl vorhanden, aber wenn man unter ihnen n auswählt, die mod F verschieden sind und einen (nicht notwendig zusammenhängenden) Teilbereich $\bar{\varphi}$ von Φ ausmachen, so stellen sie φ genau einmal dar, indem diejenigen Seiten dieses Teilbereichs $\bar{\varphi}$, die dem Inneren von Φ angehören, paarweise bei F äquivalent sind.

Den zu benutzenden Fundamentalbereich von T stellt man dadurch her, dass man die Modulfläche M der Fig. 1 teils längs der $2q$ kanonischen Rückkehrschnitte $\alpha_1, \beta_1, \dots, \alpha_q, \beta_q$, teils längs s Querschnitten, die von O aus nach den s Randkurven von M geführt werden, aufschneidet. Die Rückkehrschnitte gibt es nur für $q > 0$, die Querschnitte nur für $s > 0$. Die aufgeschnittene Fläche entspricht in Φ einem $(4q + 3s)$ -Eck \bar{M} , von dessen Seiten s auf Randseiten von Φ liegen, während die übrigen $4q + 2s$ Seiten von \bar{M} dem Inneren von Φ angehören und einander paarweise

bei den $2q + s$ erzeugenden Operationen (4.1) von T entsprechen.

Nun sei zunächst $q > 0$. Dann sei das Rückkehrschnittsystem nach 5 und die Bezeichnung wie in 7 gewählt, also t statt α_1 und b_1, a_2, \dots, b_q statt $\beta_1, \alpha_2, \dots, \beta_q$. Die n Bereiche

$$(10.1) \quad \overline{M}, t\overline{M}, t^2\overline{M}, \dots, t^{n-1}\overline{M}$$

bilden einen zusammenhängenden Teilbereich $\overline{\varphi}$ von \mathcal{O} , indem jeder der ersten $n-1$ Bereiche der Reihe (10.1) längs einer dem Schnitt b_1 entsprechenden Seite mit dem nächstfolgenden zusammenhängt. $\overline{\varphi}$ hat also noch $n(4q + 2s) - 2(n-1) = 2[n(2q + s - 1) + 1]$ freie Seiten im Inneren von \mathcal{O} , und diese müssen einander paarweise bei $n(2q + s - 1) + 1$ Elementen von F entsprechen. Diese Zahl ist $2p + r + n - 1$, während wir in (7.16) nur $2p + r$ Erzeugende von F benutzen. Wir betrachten die Herstellung von φ aus $\overline{\varphi}$ durch paarweise Korrespondenz der inneren Seiten in folgender Reihenfolge, wobei die Normalform (7.19) des Automorphismus I als leitendes Prinzip dient:

Die beiden dem Schnitt b_2 entsprechenden Seiten von \overline{M} korrespondieren bei $a_2 = a_{2,0}$, welches ja ein Element von F ist. Dann korrespondieren die beiden aus ihnen durch t hervorgehenden Seiten von $t\overline{M}$ bei ta_2t^{-1} , und das ist nach (7.19) das Element $a_{2,1}$ von F . So setzt man durch die ganze Reihe (10.1) fort und wiederholt das Verfahren mit den Elementen $b_{2,j}, a_{3,j}, \dots, b_{q,j}, 0 \leq j \leq n-1$.

Bei der Operation γ_ν von T korrespondieren die beiden dem ν -ten Querschnitt entsprechenden Seiten S_ν und $\gamma_\nu S_\nu$ von \overline{M} . Aber γ_ν gehört im Allgemeinen nicht zu F , und dann sind diese beiden Seiten nicht bei der Herstellung von

φ zu vereinigen. In jedem Fall kann man die Gleichung (7.3) in der Form

$$(10.2) \quad c_\nu a^x = \gamma_\nu t^{nx - \sigma_\nu m_\nu}$$

schreiben und dabei x so bestimmen, dass

$$(10.3) \quad 0 \leq \sigma_\nu m_\nu - xn \leq n-1$$

ist. Dann ist $t^{\sigma_\nu m_\nu - xn} S_\nu$ eine Seite von $\overline{\varphi}$, die dem Bereich $t^{\sigma_\nu m_\nu - xn} \overline{M}$ angehört, und diese Seite wird durch das zu F gehörige Element (10.2) auf die Seite $\gamma_\nu S_\nu$ von \overline{M} abgebildet. Durch Transformation mit den ersten $n-1$ Potenzen von t unter Beachtung von (7.18) und (7.19) erhält man die Korrespondenz der damit nach T äquivalenten Seiten in den übrigen Bereichen (10.1). Dies ist für alle Werte von ν durchzuführen.

Nun ist die Korrespondenz nach F für $n[2(q-1)+s]$ Seitenpaare von $\overline{\varphi}$ hergestellt, und dabei sind die $n[2(q-1)+s]$ Erzeugenden $a_{i,j}$, $b_{i,j}$, $c_{\nu,j}$ von F verwendet worden. Es bleibt noch die Korrespondenz für die restlichen $n+1$ Seitenpaare von $\overline{\varphi}$ herzustellen. $\overline{\varphi}$ besitzt noch genau 2 dem Schnitt b_1 entsprechende Seiten, die eine in \overline{M} , die zweite in $t^{n-1}\overline{M}$; die erste wird in die zweite durch $t^n = a$ übergeführt. Es bleiben noch die n Seitenpaare, die dem Schnitt $t(=a_1)$ entsprechen. Die beiden zu \overline{M} gehörigen korrespondieren bei $b = b_{1,0}$, das ja zu F gehört. Die beiden zu $t\overline{M}$ gehörigen korrespondieren daher bei $tb t^{-1}$, und die zweite Gleichung von (7.19) zeigt, dass dies Element von F durch die Erzeugenden (7.16) ausgedrückt werden kann. Das gleiche gilt daher auch für die Elemente $t^2 b t^{-2}$, \dots , $t^{n-1} b t^{-(n-1)}$, die die noch fehlenden Korrespondenzen in den übrigen Bereichen der Reihe

(10.1) herstellen. Man verwendet also hier die $(n-1)$ ersten der Reihe der Elemente (7.15), die wir ursprünglich bei der Erzeugung von F mit verwendeten, aber nachträglich wieder eliminieren konnten.

Damit ist im Falle $q > 0$ die Einteilung der Fläche φ in n Bereiche, ihr gegenseitiges Aneinandergrenzen auf φ und ihre zyklische Vertauschung bei τ aufgezeigt. Ist dabei $s > 0$, so gehören ns Seiten von $\overline{\varphi}$ zu Randseiten von \mathcal{D} . Die n Seiten von $\overline{\varphi}$, die aus dem ν -ten Rand von \overline{M} entstanden sind, bilden bei dem Zusammenschluss von $\overline{\varphi}$ zu φ zu je λ_ν einen Rand von φ , und von solchen entstehen dabei m_ν . Im ganzen entstehen dabei also r Ränder von φ , wobei r durch (3.1) ausgedrückt ist. Wie man einen Teil von diesen, oder alle, durch Elementarflächenstücke mit einem multiplen Punkt schliessen kann, ist schon erwähnt worden.

Kommen keine multiplen Ränder vor, so sind alle γ_ν — falls überhaupt $s > 0$, also Ränder vorkommen — Elemente von F , und die Seiten S_ν und $\gamma_\nu S_\nu$ von \overline{M} korrespondieren daher bei einem Element von F . Durch die Vereinigung bei F korrespondierender Seiten von \overline{M} entsteht daher eine Fläche vom Geschlecht $q-1$ mit $s+2$ Randkurven, indem nämlich 2 Randkurven von den beiden dem Schnitt b_1 entsprechenden Seiten stammen. Dasselbe wiederholt sich für die übrigen Bereiche der Reihe (10.1). Diese n Flächen ordnen sich durch zyklische Vereinigung der dem Schnitt b_1 entsprechenden Randkurven zu einer ringartigen Fläche φ zusammen. Man kann die Fläche φ metrisch regulär so einrichten, dass sie eine Rotationsgruppe der Ordnung n gestattet. Dann ist τ die $\frac{1}{n}$ Drehung von φ in sich. Dabei ist $p = n(q-1) + 1$, wie in (3.3) ausgedrückt ist. — Dieser

Fall liegt insbesondere stets für $s = 0$, also für periodische Transformationen geschlossener Flächen ohne multiple Punkte, vor.

Für $q = 0$ ist das Verfahren analog wie für $q > 0$. Für $q = 0$ ist \bar{M} ein $3s$ -Eck, von dessen Seiten s auf Randseiten von \mathcal{D} liegen, während die übrigen $2s$ dem Inneren von \mathcal{D} angehören. Man bildet wieder mittels des in 8 hergestellten Elements t von T die Reihe der Bereiche (10.1), die zusammen $\bar{\varphi}$ ausmachen. Hierbei ist $\bar{\varphi}$ nicht notwendig zusammenhängend, aber die $2ns$ Seiten von $\bar{\varphi}$, die nicht auf Randseiten von \mathcal{D} liegen, korrespondieren wieder paarweise bei Elementen aus F . Sind wieder S_ν und $\gamma_\nu S_\nu$ ein Seitenpaar von \bar{M} , so verschafft man sich durch (10.2) und (10.3) diejenige (eindeutig bestimmte) Seite $t^{\sigma_\nu m_\nu - \alpha n} S_\nu$ von $\bar{\varphi}$, die durch das zu F gehörige Element (10.2) auf $\gamma_\nu S_\nu$ abgebildet wird. Dann hat man wieder mit den Potenzen von t zu transformieren und dabei auf (7.18) und (8.23) zu achten. Führt man dies für alle Werte von ν durch, so erhält man vollen Aufschluss über die Lagerung der n Bereiche auf φ und ihre zyklische Vertauschung bei τ .

Der Aufbau von φ ist im Falle $q = 0$ besonders anschaulich, wenn Randkurven von der Multiplizität n vorkommen. Nehmen wir speziell an, es sei $\mu(\gamma_1) \equiv 1 \pmod{n}$. Dann kann man γ_1 als das t von 8 und (10.1) nehmen. In diesem Fall wird $\bar{\varphi}$ zusammenhängend, indem die n Bereiche (10.1) längs der γ_1 entsprechenden Randkurve von φ (wegen $m_1 = 1$ gibt es nur die eine γ_1 entsprechende) zyklisch angeordnet sind. Man stellt dann leicht die Korrespondenz der übrigen nicht auf Randseiten von \mathcal{D} liegenden Seiten von $\bar{\varphi}$ her. — Ist der erste Rand aus einem multiplen Punkt entstanden, so hat man nach Schliessung das bekannte Bild eines Sternes von n Bereichen

um den Drehpunkt einer elliptischen Substitution n -ter Ordnung.

11. Der Äquivalenzsatz: *Wenn zwei homöomorphe, orientierbare Flächen φ und φ' periodischen, die Orientierung erhaltenden Transformationen τ bzw. τ' in sich von gleicher Ordnung unterworfen sind, so sind τ und τ' dann und nur dann topologisch äquivalent, wenn man — nötigenfalls nach Wechsel der Orientierung auf der einen Fläche — die Randkurven und die bei τ multiplen Punkte von φ den Randkurven bzw. den bei τ' multiplen Punkten von φ' so zuordnen kann, dass zugeordnete Randkurven und zugeordnete multiple Punkte die gleiche Valenz haben.*

Dass die Bedingung notwendig ist, geht aus der am Schluss von 2 hervorgehobenen Invarianz der Valenz bei topologischer Abbildung hervor.

Den Beweis dafür, dass die Bedingung hinreichend ist, kann man zunächst dadurch erleichtern, dass man eventuell vorhandene multiple Punkte auf φ und φ' nach dem Verfahren von 3 austrennt. Zwei einander zugeordnete multiple Punkte von φ und φ' ergeben dabei zwei multiple Ränder von φ und φ' , die wiederum gleiche Valenz haben, also einander zugeordnet werden können. Es ist wohl klar, wie man aus einer gegebenen Äquivalenz von τ und τ' vor der Austrennung eine ebensolche nach der Austrennung, und umgekehrt, herleiten kann. Wir können also annehmen, dass bei τ und τ' keine multiplen Punkte vorkommen.

Nun seien p und r Geschlecht und Ränderzahl von φ und damit auch von der mit φ homöomorphen Fläche φ' , und n die gemeinsame Ordnung von τ und τ' . Sei R eine Randkurve von φ und R' die ihr zugeordnete von φ' , beide

mit der Valenz $[m, \lambda, \sigma]$. Dann gehört R zu einem System von m Rändern $R, \tau R, \dots, \tau^{m-1}R$ von φ , die die gleiche Randkurve auf der Modulfläche M λ -fach überdecken, ebenso R' zu einem System von m Rändern $R', \tau' R', \dots, \tau'^{m-1}R'$ von φ' , die die gleiche Randkurve auf der Modulfläche M' λ -fach überdecken. Man kann die gegebene Zuordnung von Rändern gleicher Valenz nötigenfalls so abändern, dass sie jene m Kurven von φ diesen m Kurven von φ' zuordnet, und in der gleichen Weise fortfahren. Man hat daher auf beiden Flächen die gleiche Zusammensetzung der Zahl r nach (3.1), also die gleiche Ränderzahl s der Modulflächen M und M' . Nach (3.2) haben M und M' dann auch das gleiche Geschlecht g .

Nun bringe man, falls $g > 0$ ist, auf M und M' ein Rückkehrschnittsystem α_1, \dots, β_q bzw. $\alpha'_1, \dots, \beta'_q$ wie in Fig. 1 so an, dass α_1 und α'_1 den μ -Wert 1 und alle übrigen Rückkehrschnitte den μ -Wert 0 haben, ordne, falls $s > 0$ ist, die s Randkurven von M und M' so, dass die Valenzen von Rändern mit der gleichen Nummer ν übereinstimmen, und ziehe wie in 10 die Querschnitte von O bzw. O' nach den Rändern von M bzw. M' . Dann sei \mathcal{G} eine topologische Abbildung von M auf M' , die das Schnittsystem von M auf das gleichbezeichnete von M' abbildet. \mathcal{G} ist zugleich eine topologische Abbildung des Fundamentalbereichs \bar{M} von T in \mathcal{O} (siehe 10) auf einen Fundamentalbereich \bar{M}' von T' in \mathcal{O}' . Zwei Randpunkte von \bar{M} , die sich bei einem Element x aus der Erzeugendenreihe (4.1) von T entsprechen, werden durch \mathcal{G} in zwei Randpunkte von \bar{M}' abgebildet, die sich bei dem entsprechenden Element x' aus der Erzeugendenreihe

$$(11.1) \quad \alpha'_1, \beta'_1, \dots, \beta'_q, \gamma'_1, \dots, \gamma'_s$$

von T' entsprechen, d. h. für einen solchen Randpunkt x von \overline{M} gilt die Beziehung

$$(11.2) \quad \mathcal{J}zx = x'\mathcal{J}x.$$

Dann wird aber \mathcal{J} durch die Forderung der unbeschränkten Gültigkeit der Funktionalgleichung (11.2) für alle Erzeugenden z , und damit für alle Elemente von T überhaupt, zu einer topologischen Abbildung von ganz \mathcal{O} auf ganz \mathcal{O}' .

Nun haben wir die Fundamentalgruppen F und F' von \mathcal{O} bzw. \mathcal{O}' herzustellen. Dabei war im Falle $q > 0$ in 7 ein System von s Zahlen σ_ν so auszuwählen, dass (7.2) galt. Da wir bei T' wegen der Gleichheit der Rändervalenz die Zahl σ_ν in derselben Restklasse mod λ_ν zu wählen haben, wie bei T , können wir bei T' dieselben Zahlen σ_ν wählen, wie bei T . Im Falle $q = 0$ hatten wir in 8 in anderer Weise einen nicht ganz eindeutig festgelegten Prozess auszuführen, indem wir von dem System (8.3) von freien Erzeugenden von T durch eine Reihe von Erzeugendenwechseln zu dem System (8.5) übergingen. Da nun zu den Erzeugenden $\gamma'_1, \gamma'_2, \dots, \gamma'_{s-1}$ von T' der Reihe nach dieselben Valenzen gehören, wie zu (8.3), können wir die Reihe der Erzeugendenwechsel für T' genau nach dem Schema derjenigen für T verlaufen lassen, und gelangen dadurch zu einem neuen Erzeugendensystem

$$(11.3) \quad t', f'_{1,0}, f'_{2,0}, \dots, f'_{s-2,0}$$

für T' , dessen Elemente dieselben Ausdrücke in $\gamma'_1, \dots, \gamma'_{s-1}$ sind, wie (8.5) in (8.3). Bei Innehaltung dieser beiden Vorschriften geht dann alles zwangsläufig: Zwei gleichbezeichnete Elemente von F und F' entsprechen sich bei dem Isomorphismus zwischen T und T' , der durch die Zuordnung der Erzeugendenreihe (11.1) von T' zu der Erzeu-

gendenreihe (4.1) von T hergestellt wurde. Insbesondere gilt dann die Funktionalgleichung

$$\mathcal{J}tx = t'\mathcal{J}x,$$

indem man in (11.2) t für z setzt, und wenn man diese auf $\varphi = \mathcal{O} \bmod F$ und $\varphi' = \mathcal{O}' \bmod F'$ deutet,

$$\mathcal{J}tP = t'\mathcal{J}P$$

für jeden Punkt P von φ . Also gilt (2.9), wobei \mathcal{J} nun diejenige topologische Abbildung von φ auf φ' bedeutet, die sich aus $\mathcal{J}\mathcal{O} = \mathcal{O}'$ und der Gültigkeit von (11.2) für alle Elemente z von F ergibt.

Damit ist der Beweis für den Äquivalenzsatz erbracht. In [13] habe ich diesen Satz ohne Benutzung der Normaldarstellung durch direktes Operieren mit φ als regulärer Überlagerungsfläche von M hergeleitet. Man erkennt, dass man durch Variieren des Zahlensystems

$$(11.4) \quad n, q, s, m_\nu, \lambda_\nu, \sigma_\nu \quad \nu = 1, 2, \dots, s,$$

das den topologischen Typus der Abbildung festlegt, unter Innehaltung der für diese Zahlen geltenden Relationen (1.3), (2.4), (4.6) und für $q = 0$ (4.7) eine vollständige Aufzählung aller topologischen Typen periodischer Transformationen (mit Erhaltung der Orientierung) angeben kann. Vgl. hierzu die Ausführungen von W. SCHERRER [9]. Die Zahlen r und p ergeben sich für jeden Typus (11.4) aus (3.1) und (3.2). Bei der Typenaufzählung (11.4) ist nicht mit multiplen Punkten, sondern nur mit Randkurven gerechnet. Je nachdem, wie man unter den s Randkurven der Modulfläche eine ausgewählte Teilmenge von multiplen durch Elementarflächenstücke mit je einem multiplen Punkt schliesst, bekommt man für jeden Typus (11.4) eine Unterteilung in endlich viele topologisch verschiedene Typen.

Der zum Werte $n = 2$ gehörige Spezialfall des Äquivalenzsatzes ist von W. SCHERRER in [8] und [10] aufgestellt worden. Da man für multiple Ränder und Punkte im Falle $n = 2$ nur die eine Möglichkeit $m = 1$, $\lambda = 2$, $\sigma \equiv 1 \pmod{2}$ hat, kann man dem Äquivalenzsatz für $n = 2$ folgende Form geben: Indikatrizerhaltende Transformationen zweiter Ordnung homöomorpher Flächen sind dann und nur dann topologisch äquivalent, wenn sie in der Anzahl der Fixpunkte und in der Anzahl der invarianten Ränder übereinstimmen.

Hervorgehoben sei auch der folgende besonders einfache Spezialfall des Äquivalenzsatzes: Indikatrizerhaltende Transformationen n -ter Ordnung homöomorpher Flächen, bei denen vor der n -ten Potenz kein Fixpunkt und kein invarianter Rand auftritt, sind immer äquivalent.

12. Automorphismus der Homologiegruppe für $q > 0$.

Die Homologiegruppe H von φ ist die Faktorgruppe der Kommutatorgruppe von F . Der durch die Transformation mit t in F induzierte Automorphismus I hat dabei einen Automorphismus J von H zur Folge. Da I^n ein innerer Automorphismus von F ist, also jedes Element von F in seiner Elementklasse lässt und daher jedes Element von H in sich überführt, ist J^n der identische Automorphismus von H . Jedes Element von F bestimmt eindeutig ein Element von H , und dieses geben wir durch dasselbe Zeichen wieder. Der Übergang von F zu H kommt dann einfach dadurch zum Ausdruck, dass man die Erzeugenden von F »vertauschbar macht«. Insbesondere wird ein Element von F in H identisch mit den Elementen, die aus ihm durch Transformation mit Elementen von F hervorgehen. Wegen des abelschen Charakters von H ist es bequem, H additiv

zu schreiben, sodass jedes Element von H durch eine lineare Verbindung der benutzten Erzeugenden dargestellt wird. Dann wird der Automorphismus J durch eine lineare Transformation des Erzeugendensystems, also durch eine quadratische Matrix, ausgedrückt, und weil J^n die Identität ist, kann man diese zu einer Diagonalmatrix umgestalten, indem man für die Linearverbindungen Koeffizienten aus dem mit der Zahl

$$(12.1) \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{n}}$$

gebildeten Zahlkörper nimmt. Dabei ist ε Wurzel der Gleichung

$$(12.2) \quad x^n - 1 = 0$$

und für jede Faktorzerlegung $n = m\lambda$ mit $m > 1$ und jedes l , $0 < l < m$, gilt

$$(12.3) \quad 1 + \varepsilon^{l\lambda} + \varepsilon^{2l\lambda} + \dots + \varepsilon^{(m-1)l\lambda} = 0.$$

Der Automorphismus J von H wird dann vollständig bestimmt durch das System der *Eigenwerte*, die in der Hauptdiagonale der Diagonalmatrix auftreten und mit denen sich die Elemente der speziell ausgewählten Homologiebasis der Reihe nach multiplizieren. Das System dieser Eigenwerte geben wir am einfachsten an durch das *charakteristische Polynom*, das genau diese Eigenwerte zu Wurzeln hat; dieses Polynom ist ja die einzige Invariante von J gegenüber beliebigem Wechsel der Homologiebasis, die man zur Erzeugung von H verwendet.

Den hiermit vorgezeichneten Weg zur Aufstellung von J führen wir nun zunächst für den Fall der Unverzweigkeit durch, und da wir dabei die in 7 und 8 gegebene

Normaldarstellung von F und I zu benutzen haben, behandeln wir die Fälle $q > 0$ und $q = 0$ getrennt. Für beide Fälle kann man die allgemeine Regel aufstellen, dass bei Verwendung von Symbolen a, b, c oder f mit doppelten Indizes der zweite Index nur nach seinem Restcharakter mod n in Betracht kommt, wenn das betreffende Symbol ein Element von H bezeichnet; siehe z. B. (7.18).

Im Falle $q > 0$ verwenden wir (7.16) als Erzeugendensystem für F und haben dabei die definierende Relation (7.17). Wir können daher zunächst H durch dieselben Symbole (7.16) erzeugen, d. h. die Elemente von H als Linearverbindungen in diesen Symbolen schreiben, und bekommen dabei aus (7.17) die einzige Relation

$$(12.4) \quad \sum_{\nu=1}^s \sum_{j=0}^{n-1} c_{\nu,j} = 0.$$

Eliminiert man im Falle $s > 0$ mittels (12.4) eine der Erzeugenden $c_{\nu,j}$, so bekommt man eine unabhängige Homologiebasis.

Nun gehen wir zu neuen Erzeugenden

$$(12.5) \quad a, B, A_{i,j}, B_{i,j}, C_{\nu,j}$$

mit gleichen Wertbereichen der Indizes wie in (7.16) über, indem wir von (7.16) nur a behalten und im übrigen folgendermassen substituieren:

$$(12.6) \quad \begin{aligned} A_{i,0} &= a_{i,0} + a_{i,1} + a_{i,2} + \dots + a_{i,n-1} \\ A_{i,1} &= a_{i,0} + \varepsilon^{-1} a_{i,1} + \varepsilon^{-2} a_{i,2} + \dots + \varepsilon^{-(n-1)} a_{i,n-1} \\ A_{i,2} &= a_{i,0} + \varepsilon^{-2} a_{i,1} + \varepsilon^{-4} a_{i,2} + \dots + \varepsilon^{-2(n-1)} a_{i,n-1} \\ &\text{---} \\ A_{i,n-1} &= a_{i,0} + \varepsilon^{-(n-1)} a_{i,1} + \varepsilon^{-2(n-1)} a_{i,2} + \dots + \varepsilon^{-(n-1)(n-1)} a_{i,n-1} \end{aligned}$$

und entsprechend

$$(12.7) \quad B_{i,j} = b_{i,0} + \varepsilon^{-j} b_{i,1} + \varepsilon^{-2j} b_{i,2} + \cdots + \varepsilon^{-(n-1)j} b_{i,n-1}$$

$$(12.8) \quad C_{\nu,j} = c_{\nu,0} + \varepsilon^{-j} c_{\nu,1} + \varepsilon^{-2j} c_{\nu,2} + \cdots + \varepsilon^{-(n-1)j} c_{\nu,n-1}$$

und endlich

$$(12.9) \quad B = nb - (n-1) [c_{1,0} + c_{2,\sigma_1 m_1} + c_{3,\sigma_1 m_1 + \sigma_2 m_2} + \cdots + c_{s,-\sigma_s m_s}] \\ - (n-2) [c_{1,1} + c_{2,\sigma_1 m_1 + 1} + \cdots + c_{s,-\sigma_s m_s + 1}] \\ \text{---} \\ - 1 \cdot [c_{1,n-2} + c_{2,\sigma_1 m_1 + n-2} + \cdots + c_{s,-\sigma_s m_s + n-2}].$$

In der Tat ist (12.5) ein neues Erzeugendensystem für H . Denn die Determinante von (12.6) ist die Differente der Gleichung (12.2), also von Null verschieden. Man kann somit die $a_{i,j}$ aus den $A_{i,j}$, ebenso die $b_{i,j}$ aus den $B_{i,j}$ und die $c_{\nu,j}$ aus den $C_{\nu,j}$ ausdrücken und schliesslich b aus (12.9) herstellen. Dabei gilt für die neuen Erzeugenden statt (12.4) die einfachere Relation

$$(12.10) \quad \sum_{\nu=1}^s C_{\nu,0} = C_{1,0} + C_{2,0} + \cdots + C_{s,0} = 0.$$

Ist $s > 0$, so kann man mittels (12.10) z. B. $C_{s,0}$ eliminieren und die übrigen $n [2(q-1) + s] + 1 = 2p + r - 1$ Elemente (12.5) bilden eine unabhängige Homologiebasis. Ist $s = 0$, so fallen die $C_{\nu,j}$ fort, da die $c_{\nu,j}$ fortfallen, und damit fällt auch die Relation (12.10) fort. In diesem Fall enthält (12.5) $2p$ Elemente, die eine unabhängige Homologiebasis bilden.

Bei Erzeugung von H durch (12.5) wird J in Diagonalform dargestellt. Denn auf Grund von (7.19) ergeben sich für die Elemente (12.5) folgende Ersetzungen bei J :

$$(12.11) \left. \begin{array}{l} A_{i,j} \rightarrow \varepsilon^j A_{i,j} \\ B_{i,j} \rightarrow \varepsilon^j B_{i,j} \\ C_{\nu,j} \rightarrow \varepsilon^j C_{\nu,j} \quad \nu = 1, 2, \dots, s \\ a \rightarrow 1 \cdot a \\ B \rightarrow 1 \cdot B. \end{array} \right\} \begin{array}{l} i = 2, 3, \dots, q \\ j = 0, 1, \dots, n-1. \end{array}$$

Denn B geht zunächst nach (7.19) über in

$$\begin{aligned} nb - n [c_{1,0} + c_{2,\sigma_1 m_1} + \dots + c_{s,-\sigma_s m_s}] \\ - (n-1) [c_{1,1} + \dots] \\ - (n-2) [c_{1,2} + \dots] \\ \dots \dots \dots \\ - 1 \cdot [c_{1,n-1} + \dots], \end{aligned}$$

und addiert man hierzu alle $c_{\nu,j}$ einmal, was nach (12.4) statthaft ist, so bekommt man wieder B .

Da die ε^j , $0 \leq j \leq n-1$, sämtliche Wurzeln von (12.2) sind, sind die in (12.11) auftretenden Eigenwerte sämtliche Wurzeln des Polynoms $(x^n - 1)^{2q+s-2}(x-1)^2$. Im Falle $s > 0$ hat man aber, um auf eine unabhängige Homologiebasis zu kommen, etwa $C_{s,0}$ fortzulassen, wodurch man einen Eigenwert 1 verliert. Also bekommt man für das zu J gehörige charakteristische Polynom $P_H(x)$ im Falle $q > 0$:

$$(12.12) \quad P_H(x) = (x^n - 1)^{2q+s-2}(x-1) \quad \text{für } s > 0$$

$$(12.13) \quad P_H(x) = (x^n - 1)^{2q-2}(x-1)^2 \quad \text{für } s = 0.$$

Nun soll noch diejenige Untergruppe R von H näher bestimmt werden, deren Elemente als Linearkombination der den Randkurven von φ entsprechenden Elemente von H ausgedrückt werden können. R verschwindet nur im Falle $s = 0$. Denn ist $s > 0$, so ist $r > 1$; sonst müsste wegen

(3.1) $s = 1$, $m_1 = 1$ sein, multiple Ränder können aber wegen (4.6) nicht in der Einzahl auftreten. Nun werden die den Rändern von φ entsprechenden Elementklassen von F nach 7 durch die Elemente (7.21) repräsentiert. Die $g_{\nu,l}$ von (7.22) erzeugen also R . Statt ihrer führen wir das folgende linear transformierte System für $\nu = 1, 2, \dots, s$ ein:

$$\begin{aligned}
 G_{\nu,0} &= g_{\nu,0} + g_{\nu,1} + g_{\nu,2} + \dots + g_{\nu,m_\nu-1} \\
 (12.14) \quad G_{\nu,1} &= g_{\nu,0} + \varepsilon^{-\lambda_\nu} g_{\nu,1} + \varepsilon^{-2\lambda_\nu} g_{\nu,2} + \dots + \varepsilon^{-(m_\nu-1)\lambda_\nu} g_{\nu,m_\nu-1} \\
 &\quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \\
 G_{\nu,m_\nu-1} &= g_{\nu,0} + \varepsilon^{-(m_\nu-1)\lambda_\nu} g_{\nu,1} + \varepsilon^{-2(m_\nu-1)\lambda_\nu} g_{\nu,2} + \dots \\
 &\quad \dots + \varepsilon^{-(m_\nu-1)(m_\nu-1)\lambda_\nu} g_{\nu,m_\nu-1}.
 \end{aligned}$$

Nun zeigen (12.14), (7.22) und (12.8), dass dieses Erzeugendensystem für die Untergruppe R von H sich in folgender Weise durch das Erzeugendensystem (12.5) für H ausdrückt:

$$(12.15) \quad G_{\nu,0} = C_{\nu,0} + \sigma_\nu m_\nu a$$

und, falls $m_\nu > 1$ ist,

$$(12.16) \quad G_{\nu,l} = C_{\nu,l} \varepsilon^{\lambda_\nu} \quad l = 1, 2, \dots, m_\nu - 1,$$

da a in (12.16) wegen der durch (12.3) ausgedrückten Eigenschaft von ε nicht auftritt. Dabei ist wegen (7.2), (12.15) und (12.10)

$$(12.17) \quad \sum_{\nu=1}^s G_{\nu,0} = \sum_{\nu=1}^s \sum_{l=0}^{m_\nu-1} g_{\nu,l} = 0.$$

Diese Gleichung drückt einfach die Tatsache aus, dass die Summe aller Randkurven von φ homolog Null ist.

Ferner zeigen (7.25) und (12.14), dass man für die $G_{\nu,l}$ folgende Ersetzungen bei J erhält:

$$(12.18) \quad G_{\nu,l} \rightarrow \varepsilon^{l\lambda_\nu} G_{\nu,l} \quad l = 0, 1, 2, \dots, m_\nu - 1.$$

Dies ergibt sich auch aus (12.15), (12.16) und (12.11). Berücksichtigt man noch, dass man, um eine unabhängige Basis für R zu erhalten, nach (12.17) etwa $G_{s,0}$ fortzulassen hat, und dass $\varepsilon^{\lambda_\nu}$ der Gleichung $x^{m_\nu} = 1$ genügt, so findet man für $s > 0$ für R das charakteristische Polynom

$$(12.19) \quad P_R(x) = \frac{(x^{m_1} - 1)(x^{m_2} - 1) \cdots (x^{m_s} - 1)}{x - 1} \quad (s > 0).$$

13. Automorphismus der Homologiegruppe für $q = 0$.

Im Falle $q = 0$ hat man die $n(s-2) + 1 = 2p + r - 1$ Symbole (8.9) als Erzeugende der Homologiegruppe H , und diese bilden hier eine unabhängige Basis der abelschen Gruppe H . Ebenso wie in 12 gehen wir mit Benutzung von (12.1) zu einem neuen Erzeugendensystem

$$(13.1) \quad a, F_{i,j}$$

mit gleichen Wertbereichen der Indizes wie in (8.9) über, indem wir substituieren

$$(13.2) \quad F_{i,j} = f_{i,0} + \varepsilon^{-j} f_{i,1} + \varepsilon^{-2j} f_{i,2} + \cdots + \varepsilon^{-(n-1)j} f_{i,n-1},$$

sodass (13.1) wieder eine unabhängige Basis wird. Nach (8.10) hat man dann für die Basis (13.1) bei dem Automorphismus J von H die Ersetzung

$$(13.3) \quad \begin{aligned} a &\rightarrow 1 \cdot a \\ F_{i,j} &\rightarrow \varepsilon^j F_{i,j} \quad i = 1, 2, \dots, s-2; j = 0, 1, \dots, n-1 \end{aligned}$$

Bei Benutzung der Basis (13.1) hat man also wieder die Transformationsmatrix in Diagonalf orm, und man erhält als charakteristisches Polynom

$$(13.4) \quad P_H(x) = (x^n - 1)^{s-2} (x - 1).$$

Das ist der $q = 0$ entsprechende Spezialfall von (12.12).

Nun soll auch hier diejenige Untergruppe R von H aufgestellt werden, deren Elemente mit einer Linearkombination von Rändern homolog sind. Diese Ränder werden durch die Elementklassen der $g_{\nu,l}$ (siehe (8.11)) in F dargestellt, und für die $g_{\nu,l}$ gelten die Gleichungen (7.22), wobei die $c_{\nu} = c_{\nu,0}$ durch (8.13) als gewisse Potenzprodukte in den $f_{i,j}$ eingeführt sind.

Setzt man beim Übergang zu H

$$(13.5) \quad c_{\nu,0} = \sum_{i=1}^{s-2} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu}^{i,j} f_{i,j},$$

so hat man nach (8.15)

$$(13.6) \quad c_{\nu,q} = \sum_{i=1}^{s-2} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu}^{i,j} f_{i,j+q},$$

wobei Indizes der c und f , die an zweiter Stelle stehen, in H nur nach ihrem Restcharakter mod n in Betracht kommen.

Nun ist nach (7.22) und (13.6) für $k = 0, 1, 2, \dots, m_{\nu} - 1$:

$$(13.7) \quad \begin{aligned} g_{\nu,k} &= c_{\nu,k} + c_{\nu,k+\sigma_{\nu}m_{\nu}} + c_{\nu,k+2\sigma_{\nu}m_{\nu}} + \dots + c_{\nu,k+(\lambda_{\nu}-1)\sigma_{\nu}m_{\nu}} + \sigma_{\nu}\alpha \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{\nu}^{i,j} [f_{i,j+k} + f_{i,j+k+\sigma_{\nu}m_{\nu}} + \dots + f_{i,j+k+(\lambda_{\nu}-1)\sigma_{\nu}m_{\nu}}] + \sigma_{\nu}\alpha \end{aligned}$$

Indem man wieder durch die Transformation (12.14),

deren Determinante nicht verschwindet, von den Elementen $g_{\nu,l}$ zu neuen Elementen $G_{\nu,l}$ übergeht, findet man für $l = 0, 1, 2, \dots, m_{\nu} - 1$:

$$\begin{aligned}
 (13.8) \quad G_{\nu,l} &= \sum_{k=0}^{m_{\nu}-1} \varepsilon^{-lk\lambda_{\nu}} g_{\nu,k} \\
 &= \sum_{i,j} \alpha_{\nu}^{i,j} \left\{ \sum_k \varepsilon^{-lk\lambda_{\nu}} [f_{i,j+k} + f_{i,j+k+\sigma_{\nu}m_{\nu}} + \dots] \right\} \\
 &\quad + \sigma_{\nu} a \sum_k \varepsilon^{-lk\lambda_{\nu}}.
 \end{aligned}$$

Hierin hat das letzte Glied den Wert $\sigma_{\nu}m_{\nu}a$ für $l = 0$ und nach (12.3) den Wert 0 für $l = 1, 2, \dots, m_{\nu} - 1$. Die geschweifte Klammer im ersten Gliede wird, ausführlich geschrieben, indem k von 0 bis $m_{\nu} - 1$ läuft,

$$\begin{aligned}
 (13.9) \quad \{ \} &= f_{i,j} + \varepsilon^{-l\lambda_{\nu}} f_{i,j+1} + \varepsilon^{-2l\lambda_{\nu}} f_{i,j+2} + \dots + \varepsilon^{-(m_{\nu}-1)l\lambda_{\nu}} f_{i,j+m_{\nu}-1} \\
 &\quad + f_{i,j+m_{\nu}} + \varepsilon^{-l\lambda_{\nu}} f_{i,j+m_{\nu}+1} + \dots \\
 &\quad + f_{i,j+2m_{\nu}} + \dots \\
 &\quad + \text{---} \\
 &= \varepsilon^{jl\lambda_{\nu}} F_{i,l\lambda_{\nu}}.
 \end{aligned}$$

Dabei ist benutzt, dass man die Summanden umordnen und im zweiten Index $\delta_{\nu}\sigma_{\nu}m_{\nu}$ durch m_{ν} ersetzen kann, wenn $\delta_{\nu}\sigma_{\nu} \equiv 1 \pmod{\lambda_{\nu}}$ ist.

Trägt man (13.9) in (13.8) ein und bezeichnet

$$(13.10) \quad \sum_j \alpha_{\nu}^{i,j} \varepsilon^{jl\lambda_{\nu}} = \beta_{\nu}^{i,l},$$

so kommt

$$(13.11) \quad G_{\nu,0} = \sum_{i=1}^{s-2} \beta_{\nu}^{i,0} F_{i,0} + \sigma_{\nu} m_{\nu} a$$

$$(13.12) \quad G_{\nu,l} = \sum_{i=1}^{s-2} \beta_{\nu}^{i,l} F_{i,l} \quad l = 1, 2, \dots, m_{\nu} - 1.$$

Indem man die Relationen (8.16) in H additiv schreibt und addiert, erhält man aus (13.6), (13.2) und (13.10)

$$(13.13) \quad \begin{aligned} 0 &= \sum_{\nu=1}^s \sum_{\varrho=0}^{n-1} c_{\nu,\varrho} = \sum_{i,j,\nu,\varrho} \alpha_{\nu}^{i,j} f_{i,j+\varrho} = \\ &= \sum_{i,\varrho} \left(\sum_{\nu,j} \alpha_{\nu}^{i,j} \right) f_{i,\varrho} = \sum_i \left(\sum_{\nu,j} \alpha_{\nu}^{i,j} \right) F_{i,0} = \\ &= \sum_i \left(\sum_{\nu} \beta_{\nu}^{i,0} \right) F_{i,0}. \end{aligned}$$

Denn da j und ϱ unabhängig von einander von 0 bis $n-1$ laufen, kann man im zweiten Index der f das j fortlassen, da es nur auf den Restcharakter mod n ankommt. Nun sind die $F_{i,0}$ unabhängig, also erhält man

$$(13.14) \quad \sum_{\nu=1}^s \sum_{j=0}^{n-1} \alpha_{\nu}^{i,j} = \sum_{\nu=1}^s \beta_{\nu}^{i,0} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, s-2,$$

als Relationen zwischen den Koeffizienten in (13.5) und (13.10).

Aus (13.11), (7.2) und (13.13) folgt nun, dass die Gleichung (12.17) auch im Falle $q = 0$ ihre Gültigkeit behält.

Das Ergebnis (13.11), (13.12) und (12.17) hätte man direkt erschliessen können, ohne die formale Rechnung durchzuführen. Denn wie in (12.18) nimmt $G_{\nu,l}$ bei dem

Automorphismus J den Faktor $\varepsilon^{l\lambda_\nu}$ an. Also muss sich $G_{\nu,l}$ linear durch diejenigen Basiselemente (13.3) ausdrücken lassen, die zu dem gleichen Eigenwert gehören, also $G_{\nu,0}$ durch die $F_{i,0}$ und a , und $G_{\nu,l}$ für $l > 0$ durch die $F_{i,l\lambda_\nu}$. In (13.11) und (13.12) werden überdies nur die Koeffizienten dieser Linearverbindungen auf die in (13.5) eingeführten Koeffizienten $\alpha_\nu^{i,j}$ und die Zahlen $\sigma_\nu m_\nu$ zurückgeführt. — Die Gleichung (12.17) bringt zum Ausdruck, dass die r Randkurven von φ zusammen homolog Null sind. Da $r-1$ von diesen Randkurven in der Homologiegruppe unabhängig sind, besteht ausser (12.17) keine weitere Relation zwischen den $g_{\nu,l}$ oder den $G_{\nu,l}$.

Man findet daher auch für $q = 0$ das charakteristische Polynom (12.19) für die Untergruppe R von H .

14. Charakteristisches Polynom und Spurformel. Man kann die für $q > 0$ bzw. $q = 0$ benutzte Homologiebasis (12.5) bzw. (13.1), die zu einer Darstellung von J in Diagonalform führte, durch Benutzung der $G_{\nu,l}$ als einen Teil der Basiselemente abändern, ohne dabei die Diagonalform zu verlassen wegen (12.18).

Für $q > 0$, $s = 0$ ist nichts zu ändern. Für $q > 0$, $s > 0$ ersetzt man $C_{\nu,l\lambda_\nu}$ durch $G_{\nu,l}$ für $\nu = 1, 2, \dots, s$ und $l = 0, 1, 2, \dots, m_\nu - 1$. Für $l > 0$ ist das wegen (12.16) einfach eine Umbenennung. Für $l = 0$ ist es wegen (12.15) für diejenigen Werte ν , die zu multiplen Randkurven gehören, eine geringfügige Abänderung der $C_{\nu,0}$. Entsprechend dem Umstande, dass man wegen (12.10) etwa $C_{s,0}$ aus (12.5) fortlässt, um eine unabhängige Basis zu haben, lässt man wegen (12.17) auch $G_{s,0}$ fort.

Für $q = 0$ hat man $s > 0$ und folgenden Sachverhalt:

Von den unabhängigen Basiselementen (13.1) erzeugen die $s-1$ Elemente

$$(14.1) \quad a, F_{1,0}, F_{2,0}, \dots, F_{s-2,0}$$

die zum Eigenwert 1 gehörige Untergruppe U_1 von H . Dieselbe Gruppe wird nach (13.11) von den $s-1$ Elementen

$$(14.2) \quad G_{1,0}, G_{2,0}, \dots, G_{s-1,0}$$

erzeugt, indem man wieder wegen (12.17) $G_{s,0}$ fortlässt und benutzt, dass weitere Relationen zwischen den $G_{\nu,l}$ nicht bestehen. Die zu einem Eigenwert ε^k , $0 < k < n$, gehörige Untergruppe U_k von H wird durch die $s-2$ Basiselemente

$$(14.3) \quad F_{1,k}, F_{2,k}, \dots, F_{s-2,k}$$

erzeugt. Unter den $G_{\nu,l}$ gehören höchstens $s-2$ in diese Untergruppe U_k , da die $G_{\nu,l}$ unabhängig sind. Man bestätigt das auch so: Für ein solches $G_{\nu,l}$ muss nach (12.18) $l\lambda_\nu = k$ sein. Wenn nun mindestens $s-1$ der $G_{\nu,l}$ zu U_k gehörten, so würden mindestens $s-1$ der λ_ν in n und k , also in dem Teiler $(n, k) < n$ von n aufgehen, also mindestens $s-1$ der m_ν würden den Faktor $\frac{n}{(n, k)} > 1$ enthalten, und das ergibt wegen (4.6) und (4.7) einen Widerspruch. — Man kann also solche Elemente $G_{\nu,l}$, für welche $l\lambda_\nu = k$ ist, mittels (13.12) als Basiselemente für die Untergruppe U_k von H einführen und dafür ebenso viele der Basiselemente (14.3) (im Höchsthfall alle) eliminieren.

Diese Einführung der $G_{\nu,l}$ mit alleiniger Ausnahme von $G_{s,0}$ in die benutzte Homologiebasis sei nun im Falle $s > 0$ vorgenommen. Damit ist alles vorbereitet, um den Automorphismus der Homologiegruppe auch im Fall der Ver-

zweigtheit sofort angeben zu können. Ist nämlich die ν -te Randkurve von M durch Ausschneiden eines multiplen Punktes entstanden, so bedeutet ihre Schliessung nach 9 die Hinzufügung der Relationen (9.1), also nach (7.22) der Relationen $g_{\nu,l} = 1$, $l = 0, 1, 2, \dots, m_\nu - 1$, zu F . Dem entspricht in H die Nullsetzung der $g_{\nu,l}$ und damit nach (12.14) auch der $G_{\nu,l}$. Man hat also in der jetzt benutzten Basis für H einfach die $G_{\nu,l}$ für den betreffenden Wert von ν fortzulassen und im übrigen nichts zu ändern. Dadurch verliert man sowohl in dem charakteristischen Polynom P_H wie in P_R den Faktor $(x^{m_\nu} - 1)$. Die Darstellung von J verbleibt in Diagonalform.

Sind mehrere Ränder von M zu schliessen, so setze man dies entsprechend fort. Nur für den Fall, dass *alle* s Ränder von M geschlossen werden, ist noch folgende Bemerkung hinzuzufügen: Da $G_{s,0}$ nicht in der Basis vorkommt, hat man beim Schliessen des letzten, s -ten, Randes nur $m_s - 1$ Basiselemente zu filgen, und man verliert in den charakteristischen Polynomen nur den Faktor $\frac{x^{m_s} - 1}{x - 1}$.

Das Ergebnis ist also folgendes: Es sei $s = u + v$, indem die zu $\nu = 1, 2, \dots, u$ gehörigen Ränder von M geschlossen werden und die zu $\nu = u + 1, u + 2, \dots, u + v$ gehörigen Ränder von M offen bleiben, also von Randkurven von φ überdeckt werden. φ ist also berandet für $v > 0$ und geschlossen für $v = 0$. Dann bekommt man wegen (12.12), (12.13), (12.19) und (13.4) die folgenden charakteristischen Polynome:

$$\left. \begin{aligned} (14.4) \quad P_H &= \frac{(x^n - 1)^{2q + s - 2} (x - 1)}{(x^{m_1} - 1)(x^{m_2} - 1) \dots (x^{m_u} - 1)} \\ (14.5) \quad P_R &= \frac{(x^{m_{u+1}} - 1)(x^{m_{u+2}} - 1) \dots (x^{m_{u+v}} - 1)}{x - 1} \end{aligned} \right\} \text{für berandetes } \varphi$$

$$(14.6) \quad P_H = \frac{(x^n - 1)^{2q+s-2} (x-1)^2}{(x^{m_1} - 1)(x^{m_2} - 1) \dots (x^{m_s} - 1)} \quad \text{für geschlossenes } \varphi.$$

Für geschlossenes φ fällt P_R fort, da R verschwindet. Diese Formeln gelten sowohl für $q > 0$, $s \geq 0$, wie für $q = 0$, in welchem Fall ja $s \geq 2$ ist. Die am Anfang von 6 vorweg behandelten Fälle a) und b) eines abelschen T werden mit umfasst: Für a) ist $q = 0$, $s = 2$ und dabei $m_1 = m_2 = 1$. Im Fall $u = 0$, $v = 2$ des Kreisringes hat H ein Basiselement, und (14.4) ergibt $P_H = x - 1$. Im Fall $u = 1$, $v = 1$ der Kreisscheibe und im Fall $u = 2$, $v = 0$ der Kugel verschwindet H und (14.4) bzw. (14.6) fallen fort. Für b) ist $q = 1$, $s = 0$, und H wird die freie abelsche Gruppe mit 2 Erzeugenden und mit F identisch. J ist dabei, ebenso wie I , der identische Automorphismus, und (14.6) gibt $P_H = (x - 1)^2$.

Für die Faktorgruppe $\frac{H}{R}$ bekommt man in allen Fällen (14.6) als charakteristisches Polynom.

Einem Fixpunkt von $\tau\varphi$ entspricht der m -Wert 1. Die Zahl Ξ , die angibt, wie oft die Zahl 1 unter den Zahlen

$$(14.7) \quad m_1, m_2, \dots, m_u$$

vorkommt, ist also gleich der Anzahl von Fixpunkten von $\tau\varphi$. Die Ausdrücke (14.4—6) sind ganze rationale Funktionen. Die Spur S_H der zu J gehörigen Transformationsmatrix von H ist die Summe der Wurzeln von P_H , also $1 - \Xi$ in (14.4) und $2 - \Xi$ in (14.6). Also erhält man für die Anzahl Ξ von Fixpunkten bei $\tau\varphi$

$$(14.8) \quad \Xi = 1 - S_H \quad \text{für berandetes } \varphi$$

$$(14.9) \quad \Xi = 2 - S_H \quad \text{für geschlossenes } \varphi.$$

In so einfacher Weise ergibt sich aus (14.4) und (14.6) für den von uns betrachteten Fall der periodischen Transformationen von Flächen die bekannte, sehr allgemeine *Spurformel von ALEXANDER* [16], *LEFSCHETZ* [17] und *HOPF* [18]. Zum Vergleich mit der von *HOPF* benutzten Form, siehe [18] Seite 498 am Schluss von § 2, sei bemerkt, dass die dort auftretenden Symbole in unserem Fall folgende Bedeutung haben: Der Index j_q jedes einzelnen Fixpunktes von $\tau\varphi$ ist $+1$, die linke Seite der Formel ist also Ξ . Die Zahl n gibt die Dimension der Mannigfaltigkeit an und ist hier also 2. Die Spur S^0f der Homologiegruppe nullter Dimension bei der Abbildung f ist hier 1, da φ zusammenhängt. S^1f ist unser S_H . S^2f ist 0, falls φ berandet ist, und gleich dem Abbildungsgrad, hier also $+1$, wenn φ geschlossen ist. Die Formel ergibt somit (14.8) bzw. (14.9) für berandetes bzw. geschlossenes φ .

Die Anzahl Ψ der bei τ invarianten Randkurven von φ ist gleich der Zahl, die angibt, wie oft die Zahl 1 unter den Zahlen

$$(14.10) \quad m_{u+1}, m_{u+2}, \dots, m_{u+v}$$

vorkommt, also für *berandetes* φ nach (14.5) durch

$$(14.11) \quad \Psi = 1 + S_R$$

gegeben, wenn S_R die Spur der zu J gehörigen Transformationsmatrix von R , also die Summe der Wurzeln von P_R bedeutet. Aus (14.8) und (14.11) erhält man

$$(14.12) \quad \Xi + \Psi = 2 - S_H + S_R = 2 - \frac{S_H}{R}.$$

Diese Formel zur Bestimmung der Gesamtanzahl von invarianten Punkten und invarianten Rändern gilt sowohl

für berandete wie für geschlossene Flächen. Denn für geschlossene Flächen verschwindet R und damit S_R , so dass man auf (14.9) kommt.

15. Kennzeichnung der Abbildung durch das charakteristische Polynom. Es soll untersucht werden, wie weitgehende Aussagen man über den topologischen Typus der periodischen Transformation allein auf Grund der Kenntnis des charakteristischen Polynoms $P_H(x)$ machen kann.

Die im Nenner von (14.4) bzw. (14.6) auftretenden Faktoren $x^{m_\nu} - 1$ entsprechen multiplen Punkten von $\tau\varphi$; daher ist $m_\nu < n$. Diejenigen irreduziblen Faktoren des Zählers, die (im Falle $2q + s > 2$) die primitiven n -ten Einheitswurzeln zu Wurzeln haben, können daher nicht bei der Division herausfallen.

Ist nun eine ganze rationale Funktion $P_H(x)$ als charakteristisches Polynom einer periodischen Transformation vorgelegt, so spalte man sie in Faktoren, die im rationalen Zahlkörper irreduzibel sind. Dann haben die einzelnen irreduziblen Faktoren das vollständige System von primitiven Einheitswurzeln eines gewissen Grades zu Wurzeln. Kommt dabei kein Grad > 1 vor, so muss man $2q + s = 2$, also einen der vorweg behandelten Fälle a) und b) von 6 haben, für die in 14 das P_H bestimmt wurde. Man erhält daher folgenden Aufschluss über die Transformation:

- 1) Enthält P_H überhaupt keinen Faktor, so liegt der Fall der Kreisscheibe oder der Kugel vor.
- 2) Für $P_H = x - 1$ hat man den Fall des Kreisringes.
- 3) Für $P_H = (x - 1)^2$ hat man den Fall des Torus ohne multiple Punkte.

In diesen Fällen lässt sich nichts über die Ordnung n der Transformation aus dem Polynom P_H erschliessen.

In allen anderen Fällen hat man $2q + s > 2$, und es kommen Grade > 1 von Einheitswurzeln vor. Dann ergibt sich zunächst die Ordnung n der Transformation als der höchste vorkommende Grad von Einheitswurzeln. Die Multiplizität, mit der das irreduzible Polynom, welches die primitiven n -ten Einheitswurzeln zu Wurzeln hat, in P_H vorkommt, ist $2q + s - 2$, woraus sich die Anzahl $2q + s$ bestimmt.

Nun bilde man das Polynom

$$(15.1) \quad H(x) = \frac{(x^n - 1)^{2q+s-2} (x-1)^2}{P_H(x)}.$$

Wegen (14.4) und (14.6) geht der Nenner von (15.1) jedenfalls im Zähler auf, und (15.1) lässt sich auf eine und nur eine Weise in die Form

$$(15.2) \quad H(x) = (x^{m_1} - 1)(x^{m_2} - 1) \dots (x^{m_w} - 1)$$

bringen. Dabei ist $w \leq s \leq 2q + s$. Wir unterscheiden nun zwischen zwei Fällen:

I. Ist keine der Zahlen m_1, m_2, \dots, m_w gleich 1, so lässt sich P_H nicht auf die Form (14.4) bringen, also muss φ notwendig geschlossen sein. Dann ist $w = s$, und da man oben $2q + s$ fand, kennt man auch q . Aus dem nach (15.2) bekannten Zahlensystem m_1, m_2, \dots, m_s findet man r nach (3.1), und danach ergibt sich p aus (3.2). Im Falle I kann man also die Ordnung der Transformation, das Geschlecht der geschlossenen Fläche φ und ihrer Modulfläche M und die Verzweigung von φ über M vollständig bestimmen. Zur Charakterisierung des topologischen Typus der Transformation fehlen nur (in dem Unterfalle $s > 0$) die

zu den einzelnen Verzweigungsstellen gehörigen Drehzahlen. Es ist von vorne herein klar, dass diese sich nicht aus P_H ergeben können. Denn ersetzt man τ durch τ^ρ , wo $(\rho, n) = 1$ ist, so ändern sich die Drehzahlen, während sich die Wurzeln der einzelnen irreduziblen Faktoren von P_H nur unter einander vertauschen, so dass P_H ungeändert bleibt. — Hervorgehoben sei der Spezialfall: Der topologische Typus einer periodischen Transformation einer geschlossenen Fläche ohne multiple Punkte ergibt sich eindeutig aus dem zugehörigen charakteristischen Polynom (abgesehen davon, dass in dem obigen Spezialfall 3) des Torus die Ordnung unbestimmt bleibt).

II. Ist mindestens eine der Zahlen m die 1, etwa $m_w = 1$, so besteht dann und nur dann die Möglichkeit eines geschlossenen φ , wenn w dieselbe Parität hat, wie die oben bestimmte Zahl $2q + s$. Ist das der Fall, so setzt man wieder $w = s$ und verfährt wie unter I. Andererseits kann man im Fall II immer P_H auf die Form (14.4) mit $w = u + 1$ bringen (und man muss das tun, wenn w und $2q + s$ ungleiche Parität haben) und kommt damit auf den Fall einer berandeten Fläche. Dann kann man, mit den Bezeichnungen von 14, $(2q + s) - u = 2q + v$ berechnen. Nun bietet aber die Kenntnis von P_H keine Handhabe mehr, um die Verteilung der Einheiten dieser Zahl auf die Anzahlen q und v zu bestimmen, sodass in diesem Fall eine grössere Anzahl von topologischen Realisierungen zu dem gegebenen P_H gehören.

Wenn man indessen sowohl P_H wie P_R kennt, kann man v bestimmen und damit die Bestimmung der topologischen Realisierung ebensoweit treiben wie im Fall I, in dem P_R fortfiel.

Für geschlossene Flächen enthält der Nenner von P_H in (14.6) den Faktor $(x-1)^s$. Die Multiplizität der Wurzel 1 in P_H ist also eine gerade Zahl, und zwar $2q$, sodass sich das Geschlecht der Modulfläche unmittelbar aus P_H ergibt.

Man bemerkt, dass es, abgesehen von den Sonderfällen 1), 2) und 3), die n unbestimmt lassen, zu einem gegebenen charakteristischen Polynom P_H nur endlich viele topologisch nicht äquivalente Realisierungen durch periodische Transformationen gibt. Das verhältnismässig grobe Hilfsmittel der Homologiegruppe gestattet also eine so weitgehende Typeneinteilung der periodischen Transformationen von Flächen, dass das feinere Werkzeug der Fundamentalgruppe darüber hinaus nur die Unterteilung jedes Typus in endlich viele topologisch nicht äquivalente Untertypen liefert.

LITERATURVERZEICHNIS

- [1] L. E. J. BROUWER: Über topologische Involutionen. Amsterdam Proceedings, Vol. 21, 1919.
- [2] — Über die periodischen Transformationen der Kugel. Math. Annalen, Bd. 80, 1919.
- [3] — Aufzählung der periodischen Transformationen des Torus. Amsterdam Proceedings, Vol. 21, 1919.
- [4] — Énumération des groupes finis de transformations topologiques du tore. Comptes rendus (Paris), t. 168 pg. 845, 1919.
- [5] B. v. KERÉKJÁRTÓ: Über die periodischen Transformationen der Kreisscheibe und der Kugelfläche. Math. Annalen, Bd. 80, 1919.
- [6] — Vorlesungen über Topologie. Berlin, Springer, 1923.
- [7] — Über die endlichen topologischen Gruppen der Kugelfläche. Amsterdam Proceedings, Vol. 22, 1919.
- [8] W. SCHERRER: Über topologische Involutionen. Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich, Bd. 70, 1925.
- [9] — Über periodische Transformationen von Flächen. Ibidem.
- [10] — Zur Theorie der endlichen Gruppen topologischer Abbildungen von geschlossenen Flächen in sich. Commentarii Math. Helv., 1929.
- [11] F. STEIGER: Die maximalen Ordnungen periodischer topologischer Abbildungen geschlossener Flächen in sich. Commentarii Math. Helv., Vol. 8, 1935.
- [12] J. NIELSEN: Topologischer Beweis eines Satzes von Wiman. Matematisk Tidsskrift B, 1936.
- [13] — Äkvivalensproblemet for periodiske Transformationer. Matematisk Tidsskrift B, 1937.
- [14] — Om regulære Riemannske Flader. Matematisk Tidsskrift B, 1932.

- [15] J. NIELSEN: Om Regning med ikke-kommutative Faktorer og dens Anvendelse i Gruppeteorien. Matematisk Tidsskrift B, 1921.
 - [16] J. W. ALEXANDER: Invariant points of a surface transformation of given class. Transactions of the American Math. Soc., Vol. 25, 1923.
 - [17] S. LEFSCHETZ: Intersections and transformations of complexes and manifolds. Transact. Amer. Math. Soc., Vol. 28, 1926.
 - [18] H. HOPF: Über die algebraische Anzahl von Fixpunkten. Math. Zeitschrift, Bd. 29, 1929.
-

